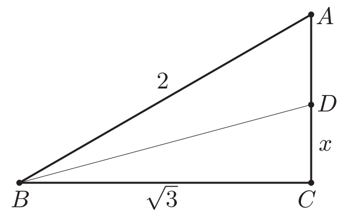
Megoldás. A $\operatorname{tg} 15^\circ$ pontos kiszámításához vegyük az ABC félszabályos háromszöget és a 30°-os, B csúcsnál fekvő szöghöz tartozó szögfelezőt, amely a szemközti befogót a D pontban metszi.



A $\operatorname{tg} 15^\circ$ pontos értéke a CD és BC szakaszok aránya. Az egyszerűség kedvéért legyen a félszabályos háromszög átfogója 2 egység, így a 30°-kal szemközti befogó egységnyi, a szomszédos befogó pedig $\sqrt{3}$ egység. A szögfelezőtétel segítségével

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right),$$

majd rögtön számolhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Tehát az exponenciális egyenlet átírható:

$$4^x - 3^x = 2-\sqrt{3}, \quad 4^x - 3^x = 4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}.$$

Azonnal látható, hogy $x = \dfrac{1}{2}$ megoldás. Belátjuk, hogy ez az egyetlen megoldás. A 3^x minden kitevőre pozitív, eloszthatjuk a kicsit átrendezett egyenlet mindkét oldalát 3^x-nel:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{2-\sqrt{3}}{3^x} + 1.$$

Tekintsük az egyenlet két oldalán álló kifejezésekhez tartozó függvényeket. A bal oldalon szereplő függvény szigorúan monoton növekedő, mert 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény. A jobb oldalon egy szigorúan monoton növekedő, pozitív értékeket felvevő függvény reciproka pozitív konstanssal van szorozva, így az egyenlet jobb oldalán álló függvény pedig szigorúan monoton csökkenő. Tehát legfeljebb egy megoldás lehet, ezt pedig már meg is találtuk:

$$x = \frac{1}{2}.$$