

I. megoldás. Tegyük fel, hogy a polinom szorzattá alakítható,

$$x(x+4) + a(y^2 - 1) + 2by = (Ax + By + C)(Dx + Ey + F),$$

ahol A, B, C, D, E és F valós számok. Mivel két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek, és az eredeti polinomban x^2 együtthatója 1, azért $AD = 1$. Az első lineáris tényezőt A -val, a másodikat pedig D -vel osztva szintén az eredeti polinom két elsőfokú polinom szorzatára való felbontását kapjuk, ezért elegendő az

$$x(x+4) + a(y^2 - 1) + 2by = (x + uy + v)(x + py + q)$$

alakú szorzatra bonthatóság feltételét megadnunk.

A megfelelő együtthatókat összehasonlítva a következő egyenleteket kapjuk:

- (1) $y^2 : a = up,$
- (2) $xy : 0 = u + p,$
- (3) $x : 4 = v + q,$
- (4) $y : 2b = uq + vp,$
- (5) konstans: $-a = vq.$

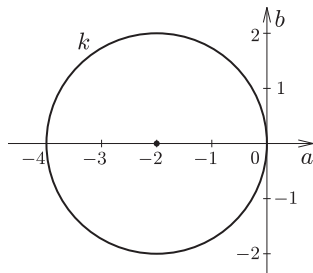
Ha $a = 0$, akkor (1) és (2) miatt $u = p = 0$, s így (4)-ből adódik, hogy csak $b = 0$ esetén lehetséges a szorzattá bontás (ebben az esetben viszont az eredeti polinom nem kétváltozós). Ha $a \neq 0$, akkor (1) miatt $u \neq 0$. A (2) egyenletből $p = -u$, amit (1)-be, illetve (4)-be írva kapjuk, hogy $a = -u^2$ és $2b = u(q - v)$. Ez utóbbiból $q - v = 2b/u$ következik, s így (3)-at figyelembe véve $q = 2 + b/u$ és $v = 2 - b/u$. Végül ezeket (5)-be beírva

$$-a = \left(2 - \frac{b}{u}\right) \left(2 + \frac{b}{u}\right) = 4 - \frac{b^2}{u^2} = 4 - \frac{b^2}{-a},$$

azaz $a^2 = -4a - b^2$, vagyis $(a + 2)^2 + b^2 = 4$. Ez a $(-2, 0)$ középpontú, 2 sugarú k kör egyenlete. Tehát ha a polinom szorzattá bontható, akkor az $(a; b)$ pont rajta van k -n.

Megfordítva, ha k egy tetszőleges $(c; d)$ pontját vesszük, akkor $c \leq 0$ teljesül. Ha $c = 0$, akkor $d = 0$ is teljesül. A $(0; 0)$ párhoz a nyilvánvalóan szorzattá bomló $x(x + 4)$ polinom tartozik. Ha $c \neq 0$, akkor legyen

$$u = \sqrt{-c}, \quad p = -\sqrt{-c}, \quad v = 2 - \frac{d}{\sqrt{-c}} \quad \text{és} \quad q = 2 + \frac{d}{\sqrt{-c}}.$$



Egyszerű számolással adódik, hogy

$$(x + uy + v)(x + py + q) = x^2 + 4x + cy^2 + 2dy - c,$$

vagyis az eredeti polinom két elsőfokú polinom szorzatára bomlik.

Tehát a keresett mértani hely a $(-2; 0)$ középpontú, 2 sugarú kör.

II. megoldás. Koordinátageometriai módszerekkel kicsit kevesebb számolással is belátható az I. megoldásban megadott feltétel szükségessége. A következő gondolatmenettel viszont a feltétel elégségességét nem tudjuk belátni.

Alkalmazzuk az $x = w - 2$, $y = z + 1$ lineáris helyettesítést. Ekkor

$$P(x, y) = x(x + 4) + a(y^2 - 1) + 2by = w^2 + az^2 + 2(a + b)z + 2b - 4 = Q(w, z).$$

Mivel lineáris helyettesítésnél elsőfokú polinomból elsőfokú polinomot kapunk, $P(x, y)$ pontosan akkor bomlik két elsőfokú polinom szorzatára, amikor $Q(w, z)$ felbomlik.

Tekintsük a $Q(w, z) = 0$ egyenletnek eleget tevő pontokat a síkon. Ha

$$Q(w, z) = (Aw + Bz + C)(Dw + Ez + F),$$

akkor ezek a pontok az

$$Aw + Bz + C = 0 \quad \text{és} \quad Dw + Ez + F = 0$$

egyenletű (esetleg egybeeső) egyeneseket alkotják. Mivel $Q(w, z)$ -ben w^2 együttthatója 1, ezért a felbontásban szereplő együttthatókra $AD = 1$ teljesül, tehát az egyenesek egyike sem párhuzamos a w koordinátatengellyel.

Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor

$$z = -\frac{1}{2b}w^2 - 1 + \frac{2}{b},$$

ami egy parabola egyenlete, tehát ebben az esetben nem bontható fel a polinom lineáris tényezőkre. Ha viszont $a = b = 0$, akkor $Q(w, z) = w^2$, ami nyilván felbontható például $w \cdot w$ alakban. Ekkor a tényezőknél megfelelő két egyenes egybeesik.

Ha $a \neq 0$, akkor $Q(w, z)$ -ben szerepel z^2 -es tag, ezért mindkét lineáris tényezőnek kell tartalmaznia cz típusú tagot ahol $c \neq 0$ egy valós szám. Ez azt jelenti, hogy a tényezőknél megfelelő egyenesek egyike sem párhuzamos az z koordinátatengellyel, azaz minden d valós szám esetén a $z = d$ egyenletű egyenes metszi a $Q(w, z) = 0$ egyenletű ponthalmazt. A $Q(w, z) = 0$ egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$w^2 = -az^2 - 2(a+b)z - 2b + 4.$$

Mivel $w^2 \geq 0$, ezért a bal oldalon lévő ($a \neq 0$ miatt) másodfokú polinom egyetlen $z = d$ helyettesítésre sem vehet fel negatív értéket, mert az azt jelentené, hogy a $z = d$ egyenletű egyenes nem metszené a $Q(w, z) = 0$ egyenletű ponthalmazt. Másrészt viszont a $w = 0$ egyenletű egyenes nem párhuzamos a ponthalmazt alkotó egyenesekkel, ezért metszi a ponthalmazt, vagyis a

$$(6) \quad -az^2 - 2(a+b)z - 2b + 4 = 0$$

egyenletnek van gyöke. E két feltétel pontosan akkor teljesül egyszerre, ha a (6) egyenlet diszkriminánsa 0. Tehát $a \neq 0$ esetén ha $Q(w, z)$ lineáris tényezőkre bomlik, akkor

$$(-2(a+b))^2 - 4(-a)(-2b+4) = 0, \quad \text{azaz} \quad (a+2)^2 + b^2 = 4.$$

Megjegyzés. A második megoldásból is megkapható a feltétel elégségessége, ehhez azonban a másodfokú egyenletekkel adott ponthalmazok az ún. *másodrendű görbék* alaposabb ismerete szükséges. Írjuk a $P(x, y)$ polinomot mátrix alakba a következőképpen:

$$(x+4) + a(y^2-1) + 2by = (x, y, 1)M(x, y, 1)^T,$$

ahol

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & b \\ 2 & b & -a \end{pmatrix}.$$

Ismert tétel, hogy a polinom akkor és csak akkor alakítható szorzattá a komplex számok körében, ha $\det M = 0$. A tényezőknél szereplő együttthatók akkor valósak, ha az is teljesül, hogy az M mátrix bal felső 2×2 -es részmátrixának determinánsa nempozitív.