Megoldás. A hatványok átírásával

$$2^{3(2x-1)}-1=7^{3(x-1)}+\frac{3}{14}\cdot 2^{2x}7^{x}.$$

Ebben a formában már látható, hogy érdemes az $a=2^{2x-1}$ és $b=7^{x-1}$ új ismeretlenek bevezetésével kezelhetőbb szerkezetűvé tenni egyenletünket. Az exponenciális kifejezések pozitívak, tehát $a,b>0$.

$$a^3-b^3-1-3ab=0.$$

A következő lépéshez felhasználjuk az ismert

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)\big(u^2+v^2+w^2-uv-vw-wu\big)$$

algebrai azonosságot. (Az azonosság a jobb oldalon kijelölt szorzás elvégzésével és összevonással néhány lépésben igazolható.)

Legyen az azonosságban $u=a, v=-b$ és $w=-1$. Az eddigiek alapján az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(a-b-1)\big(a^2+b^2+1+ab+a-b\big)=0.$$

Szorzat csak abban az esetben lehet nulla, ha egyik tényezője nulla, így elegendő az

$$a-b-1=0 \quad \text{és} \quad a^2+b^2+1+ab+a-b=0$$

egyenleteket megoldani. Tekintsük előbb a második egyenletet. Ezt – a szokásos módon – kettővel szorozva, három teljes négyzet összegévé alakíthatjuk:

$$2a^2+2b^2+2+2ab+2a-2b=0,$$
$$(a+b)^2+(a+1)^2+(b-1)^2=0.$$

Négyzetösszeg csak abban az esetben lehet nulla, ha mindegyik tag nulla. Ebben az esetben ez nem teljesülhet, mivel a és b is pozitívak, vagyis $(a+b)^2$ és $(b+1)^2$ is biztosan pozitív.

Az egyenlet összes megoldásait tehát kizárólag az

$$a-b-1=0$$

esetből kaphatjuk. A változók eredeti jelentése szerint pedig:

$$2^{2x-1}-7^{x-1}-1=0.$$

Alakítsuk úgy az első tagot, hogy a kitevő ott is $(x-1)$ legyen:

$$2\cdot 4^{x-1}-7^{x-1}-1=0.$$

Az egyenletet rendezve és osztva a pozitív 4^{x-1}-nel:

$$2-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}.$$

Vizsgáljuk meg a két oldalon található függvényeket konvexitás szerint. Mind a $\left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}$, mind pedig az $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ kifejezésekkel meghatározott függvények szigorúan konvexek az egész értelmezési tartományukon, a valós számok halmazán. A (-1)-gyel történő szorzás szemléletesen az x-tengelyre vonatkozó tükrözést jelent, így az $f(x)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, illetve a 2-vel fölfelé eltolt $g(x)=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ függvény már szigorúan konkáv. Ismert, hogy egy konvex és egy konkáv függvénynek legfeljebb két metszéspontja lehet. Ezek a metszéspontok az $x=1$ és $x=2$ helyettesítésekkel azonnal adódnak is. ($2-1=1$, illetve $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.)

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért $x=1$, $x=2$ valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.