I. megoldás. Legyen S_0 az $f\cap e_1, f\cap e_2, \dots, f\cap e_n$ pontok súlypontja. Ekkor S_0 nyilván rajta van az f egyenesen. Vegyünk fel egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origója S_0 legyen, az y tengely egyenese pedig essen egybe f-fel. Ebben a koordinátarendszerben f egyenlete $X=0$, az e_i egyenes egyenlete pedig minden $i=1,2,\dots,n$ esetén felírható $Y=m_iX+b_i$ alakban, mert ezen egyenesek egyike sem párhuzamos f-fel.

Ha az f-fel párhuzamos f_α egyenes egyenlete $X=\alpha$, akkor az $f_\alpha\cap e_i$ pont koordinátái $(\alpha, m_i\alpha+b_i)$. Tehát a súlypont koordinátáinak kiszámítására vonatkozó szabály alapján $\alpha=0$ esetén kapjuk, hogy

$$S_0=(0,0)=\left(0,\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right),$$

azaz $\sum\limits_{i=1}^n b_i=0$, általában pedig

$$S_\alpha=\left(\frac{n\alpha}{n},\frac{\sum_{i=1}^n(m_i\alpha+b_i)}{n}\right)=\left(\alpha,\frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n}+\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\right)=\left(\alpha,\frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n}\right).$$

Az S_0 és S_α ($\alpha\neq 0$) pontok összekötő egyenesének egyenletét az ismert képlet szerint felírva, majd azt rendezve kapjuk, hogy

$$(\alpha-0)(Y-0)=\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n}-0\right)(X-0),$$

$$\alpha Y=\frac{\sum_{i=1}^n m_i\alpha}{n}X,$$

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}X. \tag{1}$$

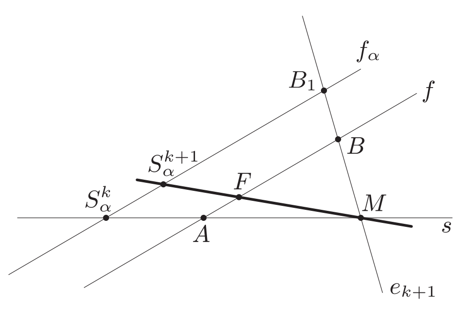
Ebben az egyenletben nem szerepel α, vagyis az S_α pont az α értékétől függetlenül rajta van az (1) egyenletű egyenesen, tehát az S_α pontok kollineárisak.

II. megoldás. A feladat állítását az egyenesek száma szerinti teljes indukcióval látjuk be. Ha $n=1$, akkor S_α megegyezik f_α és e_1 metszéspontjával, azaz valamennyi súlypont az e_1 egyenesen van.

Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz az állítás. Legyen $n=k+1$. Jelölje S_α^k az $f_\alpha\cap e_1, f_\alpha\cap e_2,\dots,f_\alpha\cap e_k$ pontok súlypontját. Az indukciós feltevés szerint az S_α^k pontok egy egyenesre esnek. Jelölje ezt az egyenest s. Egy adott f_α esetén S_α^k éppen $f_\alpha\cap s$, mert a súlypont nyilván illeszkedik f_α-ra is. (Az nem lehet, hogy s és f_α egybeessenek, mert akkor más, f_α-val párhuzamos egyenesnek nem lenne közös pontja s-sel.)

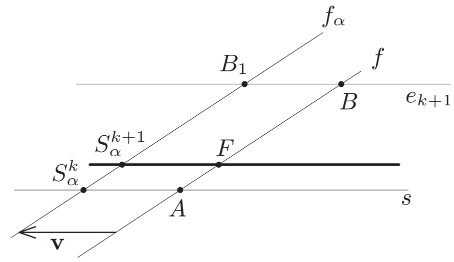
Tekintsük most az $f_\alpha\cap e_1, f_\alpha\cap e_2,\dots,f_\alpha\cap e_{k+1}$ pontok S_α^{k+1} súlypontját. Ez a súlypontszerkesztési tétel (ezt részletesebben lásd a megoldás utáni megjegyzésben) szerint megegyezik az S_α^k és $f\cap e_{k+1}$ pontok által meghatározott szakaszt $1:k$ arányban osztó ponttal (a szakasz esetleg elfajulhat egyetlen ponttá). Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezek az osztópontok egy egyenesre esnek. Két esetet különböztetünk meg.

Ha s nem párhuzamos e_{k+1}-gyel, akkor a metszéspontjukat jelölje M. Egy tetszőleges, f-fel párhuzamos, M-en át nem menő egyenes messe s-et A-ban, e_{k+1}-et pedig B-ben. Az AB szakasz $1:k$ arányú osztópontját jelölje F (*1. ábra*). Megmutatjuk, hogy minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az MF egyenesre. Ha f_α átmegy M-en, akkor s-et és e_{k+1}-et is M-ben metszi, így a metszéspontok „osztópontja” is M lesz. Ha f_α nem megy át M-en, akkor az s-sel való metszéspontja S_α^k. Ha $f_\alpha\cap e_{k+1}=B_1$, akkor az $S_\alpha^k B_1$ szakasz $1:k$ arányú osztópontja S_α^{k+1}. Tekintsük azt az M középpontú ϕ hasonlóságot, ami A-t S_α^k-ba viszi. Ekkor ϕ a B pontot B_1-be viszi, mert B képe illeszkedik az e_{k+1} egyenesre és a B képét S_α^k-val összekötő szakasz párhuzamos AB-vel, F képe pedig S_α^{k+1}, mert a hasonlóság aránytartó. Tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek az MF egyenesre.



1. ábra

Ha s párhuzamos e_{k+1}-gyel, akkor a feltételekből következik, hogy f nem párhuzamos velük. Legyen f-nek s-sel, illetve e_{k+1}-gyel való metszéspontja A, illetve B, az AB szakasz $1:k$ arányú osztópontja pedig F (*2. ábra*). Megmutatjuk, hogy ekkor minden S_α^{k+1} pont illeszkedik az F-en átmenő, s-sel párhuzamos t egyenesre. Tekintsük most azt az eltolást, ami az f egyenest f_α-ba viszi és $\mathbf{v}$ meghatározó vektora párhuzamos az s egyenessel. Ennél az eltolásnál az A képe $f_\alpha \cap s = S_\alpha^k$, a B képe $f_\alpha \cap e_{k+1}$, és ezért F képe az AB szakasz $1:k$ arányú osztópontja, azaz S_α^{k+1}. Vagyis az $\overrightarrow{FS_\alpha^{k+1}}$ vektor párhuzamos s-sel, tehát ebben az esetben az S_α^{k+1} pontok illeszkednek a t egyenesre.



2. ábra

Ezzel beláttuk, hogy az állítás $n = k+1$-re is igaz, s így minden n pozitív egész számra teljesül.

Megjegyzés. A *súlypontszerkesztési tételnek* több változata van. Feladatunk megoldása során mi a következő, egyszerű formáját használtuk:

Ha a térben egy n pontból álló $\mathcal{P}$ halmazt tetszőleges módon felosztunk egy $1 \le k \le n-1$ pontból álló $\mathcal{P}_1$ és egy $n-k$ pontból álló $\mathcal{P}_2$ halmazra, akkor $\mathcal{P}$ súlypontja megegyezik a $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ súlypontjait összekötő szakaszt $(n-k):k$ arányban osztó ponttal.

Bizonyítás. Jelöljük egy tetszőleges kezdőpontból a $\mathcal{P}$ pontjaiba mutató vektorokat $\mathbf{p}_i$-vel, a súlypontokba mutató vektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$. Ekkor a súlypont helyvektorára vonatkozó képlet szerint

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n}{n}, \quad \mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{p}_{i_1} + \mathbf{p}_{i_2} + \cdots + \mathbf{p}_{i_k}}{k}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{p}_{i_{k+1}} + \mathbf{p}_{i_{k+2}} + \cdots + \mathbf{p}_{i_n}}{n-k}.$$

Ezért

$$\mathbf{s} = \frac{k\mathbf{s}_1 + (n-k)\mathbf{s}_2}{k + (n-k)},$$

ami a szakaszt adott arányban osztó pont helyvektorára vonatkozó ismert képlet alapján bizonyítja tételünket.