I. megoldás.[1] A négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll: $x \geq 1$. Mivel a jobb oldal ekkor pozitív, a bal oldal is az: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) > 0$. Mivel $x < 1$ nem teljesülhet, azt kapjuk, hogy $x > 3$. Az egyenletet átrendezve:

$$(x-2)^2 + 1 = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}} + 2. \tag{1}$$

Az $f\colon (3;+\infty) \to (2;+\infty)$, $f(x) = (x-2)^2 + 1$ függvény szigorúan monoton növekvő, bijektív az értelmezési tartományán, ezért invertálható. Inverz függvénye az $f^{-1}\colon (2;+\infty) \to (3;+\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$. Vegyük itt mindkét oldal értékét $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$-nél:

$$f^{-1}\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}} + 2.$$

A jobb oldal épp (1) jobb oldala. Ezek alapján az egyenlet:

$$f^{-1}\big(f^{-1}(x)\big) = f(x),$$

ami pontosan akkor igaz, ha $f^{-1}(x) = f\big(f(x)\big)$, vagyis ha $x = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $f(x) > x$ esetén $f\big(f(x)\big) > f(x) > x$, amiből $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) > f\big(f(x)\big) > f(x) > x$ következik. Hasonlóan, ha $f(x) < x$, akkor $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) < f\big(f(x)\big) < f(x) < x$.

Tehát $x = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ csak akkor teljesülhet, ha $x = f(x)$, és ekkor valóban igaz is.

Így

$$(x-2)^2 + 1 = x, \quad \text{amiből} \quad x^2 - 5x + 5 = 0.$$

A megoldóképlet alapján $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Csak a nagyobb gyök teljesíti az $x > 3$ kikötést, vagyis $x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, mindkét oldalon $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ adódik, tehát a megoldás jó.

II. megoldás. Mivel $x = 1$ nem megoldás, ezért legyen $a = \sqrt{x-1} > 0$. Ekkor $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = a^2\big(a^2 - 2\big)$ és $\sqrt{1 + \sqrt{x-1}} = \sqrt{1+a}$. Ebből $a^2\big(a^2-2\big) = \sqrt{1+a}$, amit négyzetre emelve $a^4\big(a^4 - 4a^2 + 4\big) = 1 + a$. Ezt rendezve $a^8 - 4a^6 + 4a^4 - a - 1 = 0$.

Próbáljuk meg a bal oldalt szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} a^8 - 4a^6 + 4a^4 - a - 1 &= a^8 - a^7 - a^6 + a^7 - a^6 - a^5 - 2a^6 + 2a^5 + 2a^4 - \\ &\quad - a^5 + a^4 + a^3 + a^4 - a^3 - a^2 + a^2 - a - 1 = \\ &= \big(a^2 - a - 1\big)\big(a^6 + a^5 - 2a^4 - a^3 + a^2 + 1\big). \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor 0, ha az egyik tényezője az.

A második tényezőt vizsgálva:

$$\begin{aligned} a^6 + a^5 - 2a^4 - a^3 + a^2 + 1 &= a^6 - 2a^3 + 1 + a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2 = \\ &= \big(a^3 - 1\big)^2 + a^3(a-1)^2 + a^2 > 0, \end{aligned}$$

mivel az első két tag nemnegatív, a harmadik pedig pozitív.

Ha az első tényező 0: $a^2 - a - 1 = 0$, amiből $a_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel $a > 0$, csak a pozitív megoldás jön szóba: $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mivel $x = a^2 + 1$, így ebből

$$x = 1 + \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ami behelyettesítve valóban jó megoldást ad.

Megjegyzés. Aki egy 8-ad-fokú polinomot indoklás nélkül szorzattá alakított, legfeljebb 3 pontot kaphatott.

III. megoldás. Az előző megoldásokból $x \geq 3$ és az egyenlet $(x-1)(x-3) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}}$.

Legyen $a = x - 1 \geq 2$, ekkor

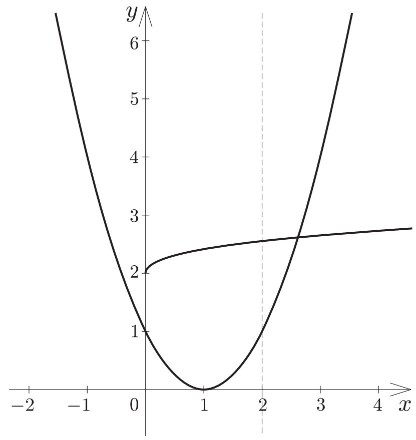
$$(a-1)^2 - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{a}},$$

vagyis $(a-1)^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}$.

---

[1] Érdemes tanulmányozni *Ábrahám Gábor:* Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelősége és egyéb érdekességek c. cikkét (KöMaL, 2010. december, és `www.komal.hu/cikkek/abraham/abraham.h.shtml`).

Az $y=(x-1)^2$ függvény grafikonja $x\geq 2$ esetén a megfelelő parabolának egy szigorúan monoton növekedő része, amely végig konvex. Az $y=1+\sqrt{x}$ függvény gyökfüggvény, aminek menete még egy gyökvonással lényegében nem változik (nem keletkezik benne inflexiós pont, végig konkáv). Így a két grafikon egy pontban metszi egymást.



Mivel $a>0$, gyököt vonhatunk mindkét oldalból: $a-1=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}$, amiből

$$a=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}. \tag{2}$$

Ha a helyére a jobb oldalon behelyettesítenénk a értékét, vagyis a jobb oldalt, majd ezt az eljárást végtelen sokszor megismételnénk, úgy egy végtelen sorozatot kapnánk: $1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}$. Azt sejtjük, hogy az egyenletben szereplő a értéke ez a sorozat, vagyis a bárhova behelyettesíthető a sorozaton belül, tehát:

$$a=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}=1+\sqrt{a}, \quad \text{ebből} \quad a-1=\sqrt{a}.$$

Innen $x-2=\sqrt{x-1}$, négyzetre emelve $x^2-4x+4=x-1$, rendezve

$$x^2-5x+5=0.$$

Ennek az egyetlen, a kikötésnek megfelelő gyöke $x=2{,}5+\sqrt{1{,}25}$. Mivel több gyök nincs, ez az egyetlen megoldás.

Megjegyzés. Mivel $a>0$, a (2) egyenlet mindkét oldalából gyököt vonva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{a}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{a}}}},$$

amiből $f(y)=\sqrt{1+y}$ jelöléssel az I. megoldásbeli $y=f\big(f\big(f(y)\big)\big)$ alakot kapjuk.