Megoldás. Azt, hogy egy tekercsben folyó áram változása mekkora feszültséget kelt egy másik tekercsben, a két tekercs közötti M kölcsönös indukciós együttható felhasználásával adhatjuk meg:

$$U_2 = M\,\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Vákuumban lévő tekercsek esetén – jó közelítéssel a légmagos tekercsek is ilyennek tekinthetők elektromos szempontból – a kölcsönös indukciós együtthatónak a két tekercsre vonatkozóan szimmetrikusnak kell lennie, vagyis fenn kell állnia a következő összefüggésnek is:

$$U_1 = M\,\frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Most már válaszolhatunk az a) kérdésre: Bármelyik tekercsben folyik adott effektív áramerősségű és frekvenciájú váltakozó áram, *a másik tekercsben mindig ugyanakkora feszültség indukálódik!*

A b) kérdésre akkor tudunk válaszolni, ha meg tudjuk határozni a feladatban látható légmagos tekercspár kölcsönös indukciós együtthatóját. Ne felejtsük el: ennek (N_1, N_2)-ben szimmetrikus kifejezésnek kell lennie.

A megoldáshoz azt kell észrevennünk, hogy a feladatban a voltmérő által jelzett U_2 feszültség fellépése két okra vezethető vissza.

I. Az (1) tekercs fluxusának változása hatással van a (2) tekercsre, ebben $U_2^{(\mathrm{I})}$ körfeszültséget indukál:

$$U_2^{(\mathrm{I})} = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta(BA_1)}{\Delta t}.$$

Az (1) tekercsben létrejövő B értékét a gerjesztési törvényből kaphatjuk meg, ha azt az (1) tekercs középkörére alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy az R_1 sugarú körlapot $N_1 I_1$ áram metszi:

$$B\cdot 2\pi R_1 = \mu_0 N_1 I_1, \qquad \text{ebből} \qquad B = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{2\pi R_1}.$$

Helyettesítsük be ezt $U_2^{(\mathrm{I})}$ kifejezésébe:

$$U_2^{(\mathrm{I})} = \frac{\Delta\left(\mu_0 \frac{N_1 I_1}{2\pi R_1} A_1\right)}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N_1 A_1}{2\pi R_1}\,\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Fontos összefüggéshez jutottunk, de itt a $\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}$ előtt álló arányossági tényező még csak N_1-től függ, ezért biztosan nem lehet a keresett kölcsönös indukciós együttható. Szükségünk van a már jelzett másik ok megvizsgálására is. Ez pedig a következő:

II. Az (1) tekercs szórt mágneses terének változása hatással van a (2) tekercsre, ebben

$$U_2^{(\mathrm{II})}\ \left(= \sum_i U_{i2}^{(\mathrm{II})}\right)$$

körfeszültséget indukál.

$$U_2^{(\mathrm{II})} = N_2 \frac{\Delta(\overline{B}_\mathrm{n} A_2)}{\Delta t},$$

(ahol $\overline{B}_\mathrm{n}$ a menetfelületre merőleges B komponens nagyságának átlaga). Itt $U_{i2}^{(\mathrm{II})}$-vel jelöltük a második tekercs i-edik menetében indukálódó feszültséget, amely lehet, hogy kicsi a szórt mágneses tér gyengesége miatt, de összegezve az egész (2) tekercsre, már nem hanyagolható el. Ez a szórt mágneses fluxus a különböző menetekre más és más lehet, egy menetre vonatkozó átlagértékét jelöltük $\overline{B}_\mathrm{n} A_2$-vel.

$\overline{B}_\mathrm{n}$ kiszámításához írjuk fel újra a gerjesztési törvényt, de most a (2) tekercs középkörére:

$$\overline{B}_\mathrm{n}\cdot 2\pi R_2 = \mu_0 I_1$$

(mivel most az R_2 sugarú körlapot egyetlen I_1 áram metszi).

A II. ok miatt indukálódó körfeszültség tehát

$$U_2^{(\mathrm{II})} = N_2\,\frac{\Delta\left(\mu_0 \frac{I_1}{2\pi R_2} A_2\right)}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N_2 A_2}{2\pi R_2}\,\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Most már felírhatjuk a voltmérőre jutó teljes feszültséget:

$$U_2 = U_2^{(\mathrm{I})} + U_2^{(\mathrm{II})}.$$

Használjuk ki, hogy a két tekercs csak menetszámában különbözik, vagyis $A_1 = A_2 = A$ és $R_1 = R_2 = R$, ekkor

$$U_2 = \mu_0 \frac{(N_1+N_2)A}{2\pi R}\,\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Megkaptuk a keresett kölcsönös indukciós együtthatót:

$$M = \mu_0 \frac{(N_1 + N_2)A}{2\pi R},$$

és ez már valóban szimmetrikus (N_1, N_2)-ben!

Hogyan határozhatjuk meg U_2 konkrét, numerikus értékét? Az ismert effektív értékű U_1 feszültség és az (1) tekercsben folyó áram változási sebessége között az induktivitás, az (1) tekercs önindukciós együtthatója teremt kapcsolatot:

$$U_1 = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N_1^2 A}{2\pi R} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Az előbb kaptuk:

$$U_2 = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \mu_0 \frac{(N_1 + N_2)\, A}{2\pi R} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Ezek szerint

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_1^2} = \frac{100 + 900}{100^2} = \frac{1}{10},$$

$$U_2 = \frac{U_1}{10} = \frac{230 \text{ V}}{10} = 23 \text{ V}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldásban feltételeztük, hogy mindkét tekercsen ugyanolyan irányú (csavarodású) a tekercselés. Ha véletlenül nem ez a helyzet, akkor a voltmérő által mutatott érték

$$U_2 = \frac{N_2 - N_1}{N_1^2} U_1 = \frac{800}{10\,000} 230 \text{ V} = 18{,}4 \text{ V}$$

lesz. Ennek felismerését – „észrevételét” – már nem várta el a versenybizottság.

2. Az eredményhirdetéskor *Vankó Péter,* az 1976-os Eötvös-verseny győztese, aki ma már a hazai fizikai diákolimpiai csapat vezetője, saját készítésű tekercsekkel és nagyfrekvenciás berendezéssel demonstrálta a feladatban leírt jelenséget. A kvantitatív kísérlet összeállításáért és bemutatásáért – melyben Vigh Máté segédkezett – külön köszönet illeti a BME docensét.