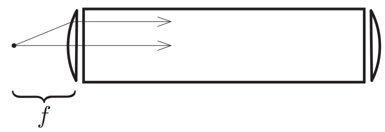
Megoldás. *a*) Ha azt szeretnénk, hogy a rúd másik végétől ugyanakkora távolságra találkozzanak az onnan kilépő fénysugarak, akkor egy nyilvánvaló megoldás erre az, hogy a rúd egyik külső fókuszába helyezzük el a pontszerű fényforrást. Az ebből kiinduló fénysugarak a rúd belsejében párhuzamosan haladnak, majd a másik végénél kilépve újra fókusztávolságnyira egyesülnek.

Tovább egyszerűsíti a megoldást, ha gondolatban levágjuk a rúd végeit. Ezáltal két vékony lencsét és közöttük egy „plánparalel” réteget kapunk (*3. ábra*).



3. ábra

A vékony, síkdomború lencse fókusztávolságára

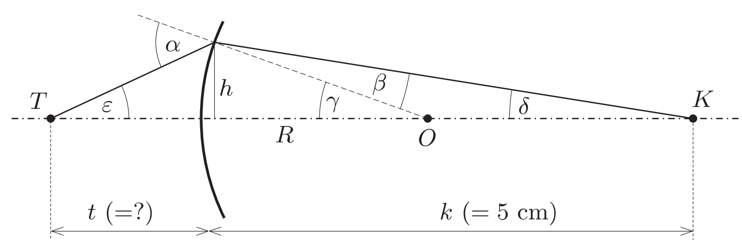
$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\quad \text{most}\quad R_2\to\infty.$$

Így

$$f=\frac{R}{n-1}=\frac{1\ \text{cm}}{1{,}5-1}=2\ \text{cm}.$$

Van azonban egy másik lehetséges megoldás is! Ekkor a fénysugarak nem párhuzamosan haladnak a rúd belsejében, hanem a rúd közepén találkoznak, majd ebből a pontból kiindulva érik el a rúd másik végét. Ott kilépve éppen olyan messze találkoznak, mint amilyen távolságra voltak a rúd első végétől, amikor elindultak. Ez is egy szimmetrikus sugármenet, de most már nem segít a megoldásban az előbbi „felszeletelés”.

Vizsgáljuk meg általánosan az első felület adta leképezést! Legyen a kiindulási T tárgypont a rúdvégtől t távolságra, keletkezzék ennek K képe a rúd belsejében k távolságra a leképező rúdvégtől. További jelölések a *4. ábrán* láthatók.



4. ábra

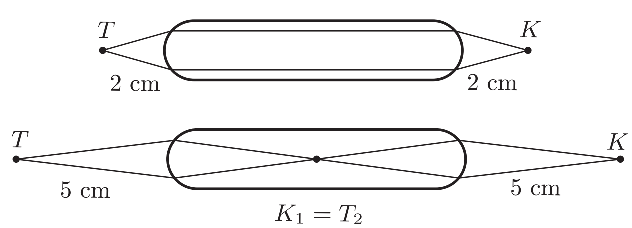
Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha=\varepsilon+\gamma$, valamint $\gamma=\beta+\delta$. Mindegyik szög külön-külön is kicsi, ezért a Snellius–Descartes-törvény felhasználásával

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\approx\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\varepsilon+\gamma}{\gamma-\delta}.$$

Ebből

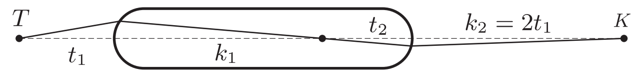
$$n(\gamma-\delta)=\varepsilon+\gamma,$$
$$n\gamma-\gamma=\varepsilon+n\delta,$$
$$(n-1)\,\frac{h}{R}=\frac{h}{t}+n\frac{h}{k},$$
$$\frac{1}{t}+\frac{n}{k}=(n-1)\,\frac{1}{R}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{t}+\frac{1{,}5}{5\ \text{cm}}=\frac{0{,}5}{1\ \text{cm}}\quad\Rightarrow\quad t=5\ \text{cm}.$$

A kétféle sugármenet tehát a következő:



5. ábra

b) Tekintsük a *6. ábrát!*



$k_1 + t_2 = \ell = 10$ cm

6. ábra

Az előző gondolatmenethez hasonlóan most is meghatározhatnánk a kis szöget bezáró fénysugarakra érvényes leképezési törvényeket. Helykímélés céljából ezt itt nem tesszük meg, de bárki ellenőrizheti, hogy a két végnél a következőket kapjuk:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{n}{k_1} = \frac{n-1}{R}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{n}{t_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{n-1}{R}.$$

(Megjegyezni úgy lehet, hogy mindig azt a kép-, illetve tárgytávolságot kell osztani n-nel, amelyik az üvegben van.)

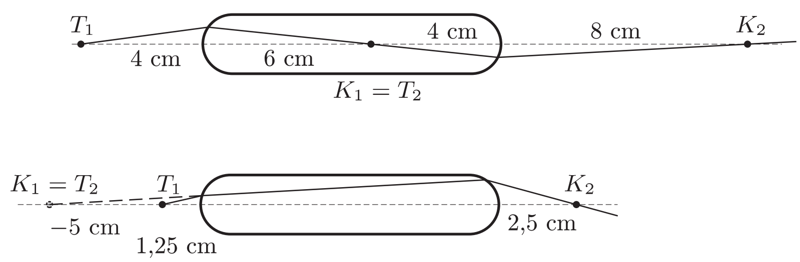
A keresett t_1 távolságot x-szel jelölve:

$$\frac{1}{x} + \frac{1{,}5}{k_1} = \frac{0{,}5}{1\text{ cm}}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1{,}5}{10\text{ cm} - k_1} + \frac{1}{2x} = \frac{0{,}5}{1\text{ cm}}.$$

Ebből x-re másodfokú egyenlet adódik, megoldása:

$$x_1 = 4\text{ cm}; \qquad x_2 = 1{,}25\text{ cm}.$$

Ellenőrzésképpen kiszámíthatjuk az új képpontok helyzetét. Eredményünket a *7. ábra* mutatja.



7. ábra. $x = 4$ cm esetén $k_1 = 6$ cm, $t_2 = 4$ cm, $k_2 = 8$ cm. $x = 1{,}25$ cm esetén $k_1 = -5$ cm, $t_2 = 15$ cm, $k_2 = 2{,}5$ cm

Megjegyzések. 1. További megoldásokat is kaphatnánk, ha nemcsak a második rúdvégen átmenő, hanem az innen visszaverődő fénysugarakat is vizsgálnánk. Ezek egy része az első felületről is visszaverődik, és újra a második felület felé halad. Itt egy részük kilép, másik részük visszaverődik. Vagyis páros számú visszaverődés után újabb és újabb, egyre halványabb képpontok keletkeznek a rúd másik végéről történő kilépés után a levegőben. Ennek vizsgálatát természetesen nem várta el a versenybizottság.

2. Több versenyző próbálkozott olyan megoldással, amikor az üveghenger oldala is részt vesz a leképezésben. Ez hibás gondolat, mivel a rúd tengelyén lévő pontból kiinduló és a tengellyel kis szöget bezáró fénysugarak az üvegben is a tengely közelében haladnak, nem érhetik el a henger oldalát.