

Megoldás. *Ismert mennyiségek:*

α a korong dőlésszöge;

Ω a korong szögsebessége;

R a labda sugara.

Szükség lehet még a következőkre:

m a labda tömege;

$\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ a labda tehetetlenségi nyomatéka a középpontján átmenő tengelyre vonatkozólag;

S a labdára ható súrlódási erő;

N a labdára ható nyomóerő;

v_0 a labda (tömeg)középpontjának kezdősebessége;

ω_0 a labda kezdeti szögsebessége.

A labda tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, miközben a nyomóerő, a súrlódási erő és a nehézségi erő hat rá. Ezek eredője tehát zérus kell legyen. Ez csak úgy lehet, ha a nyomóerő nagysága $N = mg \cos \alpha$ és a súrlódási erő nagysága $S = mg \sin \alpha$. A súrlódási erőnek merőlegesnek kell lennie a sebességre, mert különben gyorsítaná vagy lassítaná azt. Ez pedig azt jelenti, hogy a labdának vízszintesen (felülről nézve balra) kell gurulnia, hiszen \mathbf{S} a lejtő síkjában felfelé mutató vektor!

A megoldás kulcsa, hogy a labda forgását két, egymásra merőleges tengely körüli forgás eredőjeként fogjuk fel.

1. A korong síkjával párhuzamos, lejtés irányú tengely körül a labda egyenletesen forog:

$$\omega_1 = \omega_0 = \frac{v_0}{R}.$$

2. A korong síkjával párhuzamos, vízszintes tengely körül a labda gyorsulva forog:

$$\omega_2 = \frac{r\Omega}{R}, \quad \text{ahol} \quad r = v_0 t.$$

A szöggyorsulás, mivel $\omega_2(t)$ lineáris függvénye az időnek:

$$\beta = \frac{\omega_2}{t} = \frac{v_0 \Omega}{R}.$$

Erre a forgásra a dinamika alaptörvénye:

$$\begin{aligned} \sum M &= \Theta \beta, \\ SR &= \frac{2}{5}mR^2 \frac{v_0 \Omega}{R}, \\ Rmg \sin \alpha &= \frac{2}{5}mR^2 \frac{v_0 \Omega}{R}. \end{aligned}$$

Ebből kifejezhető v_0 és ω_0 is:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{5}{2} \frac{g \sin \alpha}{\Omega}, \\ \omega_0 &= \frac{v_0}{R} = \frac{5}{2} \frac{g \sin \alpha}{\Omega R}. \end{aligned}$$

Megkaptuk a szükséges kezdőfeltételeket. Érdekes, hogy sem v_0 , sem ω_0 nem függ a labda m tömegétől, v_0 pedig még a labda R sugarától sem!

Megjegyzések. 1. Az a gondolat, hogy egy labda forgása két forgás eredőjeként fogható fel, már szerepelt egyszer az Eötös-versenyen. 1972-ben ez volt a 3. feladat:

„Felfújtt, könnyű műanyag labdát taláalomra megpörgetve sima vízfelületre ejtünk. Azt tapasztaljuk, hogy mielőtt megáll, rendszerint függőleges tengely körül forog. Mi a jelenség magyarázata?”

A megoldás az, hogy a labda bármely tengely körüli forgása egy függőleges és egy vízszintes tengely körüli forgás eredőjeként tárgyalható. A vízszintes tengely körüli forgást a súrlódás sokkal jobban fékezi, ezért marad meg végül mindig a függőleges tengely körüli forgás.

2. Az eredményhirdetésekor Vigh Máté levetítette azt a videót, amely több variációban mutatta be a feladatban leírt jelenséget. A bemutatást a közönség élénk figyelemmel kísérte.