3. feladat. A grönlandi jégsapka

3.1. A jégtakaró belsejében a hidrosztatikai nyomás, mint a jégválasztó vonaltól mért x távolság és a földfelszíntől (tengerszinttől) mért z magasság függvénye: $p(x,z) = \varrho_{\text{jég}} g \big(H(x) - z\big)$.

3.2*a*. Az y–z síktól („jégválasztótól") x távolságra lévő függőleges oldalfalra ható erő kifejezhető:

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \varrho_{\text{jég}} g \big(H(x) - z\big)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \Delta y \varrho_{\text{jég}} g H(x)^2 .$$

A függőleges oldalfalú jégrétegre ható két vízszintes erő különbsége:

$$\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \Delta x = -\Delta y \varrho_{\text{jég}} g H(x) \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} \Delta x .$$

Használjuk fel, hogy $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$. Így adódik S_b értékére:

$$S_b = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\varrho_{\text{jég}} g H(x)\, \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} .$$

Ezzel igazoltuk, hogy $S_b = kH(x)\,\mathrm{d}H/\mathrm{d}x$, ahol az arányossági tényező $k = -\varrho_{\text{jég}} g$.

3.2*b*. Megkapjuk a jégsapka $H(x)$ magasságprofilját, ha megoldjuk a következő differenciálegyenletet:

$$S_b = -\varrho_{\text{jég}} g H(x)\, \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, \quad \text{ebből} \quad H\,\mathrm{d}H = -\frac{S_b}{\varrho_{\text{jég}} g}\,\mathrm{d}x .$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$H(x)^2 = -\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} x + C .$$

Használjuk fel, hogy H értéke az $x = L$ helyen 0. Így az integrációs állandóra adódik:

$$C = \frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} L .$$

Most már a $H(x)$ magasságprofil megadható:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g}(L - x)}\,.$$

Megadhatjuk H legnagyobb értékét, melyet az $x = 0$ helyen vesz fel a függvény:

$$H_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g} L}\,.$$

3.2*c*. Grönland modelljében a jégsapka alapja egy téglalap, amelynek területe $A = 10L^2$. A jégsapka térfogatát úgy fogjuk megkapni, ha a **3.2*b*.** feladatrészben megismert magasságprofilt erre a területre integráljuk.

$$V_{\text{jég}} = (5L)2 \int_0^L H(x)\,\mathrm{d}x = 10L \int_0^L \left(\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{L - x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 10LH_{\mathrm{m}} \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Áttérve az $u = 1 - x/L$ integrálási változóra:

$$V_{\text{jég}} = 10L^2 H_{\mathrm{m}} \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 10L^2 H_{\mathrm{m}} \cdot \frac{2}{3} .$$

Felhasználva, hogy $H_{\mathrm{m}} \propto L^{1/2}$, illetve az $L \propto A^{1/2}$ arányosságot azt kapjuk, hogy $V_{\text{jég}} \propto A^{5/4}$. Tehát a keresett kitevő $\gamma = 5/4$.

3.3. A szimmetria miatt a jégválasztónál a jég x-irányú sebessége 0, tehát $v_x(x = 0) = 0$. Tekintsük a jégsapka $x = 0$ és $x > 0$ között elhelyezkedő, Δy szélességű darabját! Erre a darabra a hóesések miatt egységnyi idő alatt $V_{\text{be}} = cx\Delta y$ térfogatú jég rakódik. Eközben a kiszemelt jégdarab $x > 0$-nál elhelyezkedő, $H_{\mathrm{m}}\Delta y$ területű, függőleges keresztmetszetén egységnyi idő alatt $V_{\text{ki}} = v_x(x) H_{\mathrm{m}} \Delta y$ térfogatú jég áramlik ki. Mivel a jégsapka alakja időben állandósult állapotban található, $V_{\text{be}} = V_{\text{ki}}$, ahonnan a

$$v_x(x) = \frac{c\,x}{H_{\mathrm{m}}}$$

eredményt kapjuk.

3.4. A jég áramlási sebességének komponenseire vonatkozó $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}x + \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}z = 0$ egyenletből, valamint a **3.3.** feladatrész eredményét használva:

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = -\frac{c}{H_\mathrm{m}}.$$

Integrálás után:

$$v_z(z) = -\frac{c\,z}{H_\mathrm{m}} + C,$$

ahol a C integrálási változó a $v_z(z=0) = 0$ feltétel miatt zérus. A jégdarabkák függőleges sebességkomponense tehát:

$$v_z(z) = -\frac{c\,z}{H_\mathrm{m}}.$$

3.5. A jégdarabka sebességének x- és z-irányú komponensére kapott kifejezések differenciálegyenleteket szolgáltatnak az $x(t)$, $z(t)$ koordinátákra:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{H_\mathrm{m}}x, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{H_\mathrm{m}}z.$$

A kezdeti feltételeket ($z(0) = H_\mathrm{m}, x(0) = x_i$) figyelembe véve a következő két függvény adódik eredményül:

$$x(t) = x_i e^{\frac{c}{H_\mathrm{m}}t}, \qquad z(t) = H_\mathrm{m} e^{-\frac{c}{H_\mathrm{m}}t}.$$

A két függvényt összeszorozva az idő kiküszöbölhető: $x \cdot z = x_i H_\mathrm{m}$, amiből látható, hogy a jégdarabka pályája egy

$$x = \frac{x_i H_\mathrm{m}}{z}$$

egyenletű hiperbola.

3.6. A jégválasztónál ($x = 0$) az áramlás csak függőleges irányú, és a $z(t)$ függvényt a **3.5.** feladatrészben már felírtuk. Képezzük ennek inverzét:

$$\tau(z) = \frac{H_\mathrm{m}}{c} \ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{z}\right).$$

3.7*a*. A c_ig jégképződési sebesség meghatározásához szükségünk van a következő adatokra: $T_1 = 11700$ év; $z_1 = 3060\ \mathrm{m} - 1492\ \mathrm{m} = 1568\ \mathrm{m}$; $H_\mathrm{m} = 3060$ m. A **3.6.** feladatrészben levezetett függvényt használva:

$$c_\mathrm{ig} = \frac{H_\mathrm{m}}{T_1} \ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{z_1}\right) = 0{,}175\ \mathrm{m/év}.$$

A jégkorszak 120 ezer évvel ezelőtti kezdete a feladat szövege szerint 3040 m mélységnek feleltethető meg. Használjuk a jégfolyam áramlási sebességének függőleges komponensére a **3.4.** feladatrészben kapott összefüggést:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{H_\mathrm{m}}z.$$

Átrendezve, majd mindkét oldalt integrálva 3040 m mélységtől a felszínig:

$$H_\mathrm{m}\left(-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}t,$$

$$H_\mathrm{m} \ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{H_\mathrm{m} - 3040}\right) = \int_{11\ 700\ \text{év}}^{120\ 000\ \text{év}} c_\mathrm{jk}\,\mathrm{d}t + \int_0^{11\ 700\ \text{év}} c_\mathrm{ig}\,\mathrm{d}t,$$

$$H_\mathrm{m} \ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{H_\mathrm{m} - 3040}\right) = c_\mathrm{jk} \cdot (108\ 300\ \text{év}) + c_\mathrm{ig} \cdot (11\ 700\ \text{év}).$$

Az egyenlet rendezése és behelyettesítés után a $c_\mathrm{jk} = 0{,}123$ m/év eredményt kapjuk, ami sokkal kevesebb csapadékot jelent, mint napjainkban.

3.7*b*. A feladat szövegében (lásd a KöMaL múlt havi számát) az *5. ábra* (*b*) grafikonjáról leolvasható, hogy a jégkorszakból a jégkorszak utáni időszakba történő átmenetkor a δ^{18}O értéke kb. -43 ezrelékről -34 ezrelékre változott. Az *5. ábra* (*a*) grafikonja szerint δ^{18}O értékének ilyen változása kb. -40 °C és -30 °C hőmérsékletek között következik be, ez 10 °C hőmérsékletemelkedést jelent.

3.8. A jégsapka alapját modellező téglalap területét ismerve kiszámolható a téglalap L hosszúságparamétere:

$$L = \sqrt{A_\mathrm{G}/10} = 4{,}14 \cdot 10^5\ \mathrm{m}.$$

A jégsapka térfogatának kiszámításához használjuk a **3.2*b*.** és **3.2*c*.** részben kapott eredményeket!

$$V_{\text{jég}} = \frac{20}{3} L^2 H_{\text{m}} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\varrho_{\text{jég}} g}} = 3{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}^3.$$

Ennek a jégnek a megolvadása során keletkező víz térfogata:

$$V_{\text{víz}} = \frac{\varrho_{\text{jég}}}{\varrho_{\text{víz}}} V_{\text{jég}} = 3{,}18 \cdot 10^{15} \text{ m}^3,$$

ezt az eredményt elosztva a Föld óceánjainak teljes területével megkapjuk az olvadás okozta átlagos vízszintemelkedést:

$$h = \frac{V_{\text{víz}}}{A_{\text{óceán}}} = 8{,}82 \text{ m}.$$

3.9. Az óceán felszíne ekvipotenciális. A vízfelszín h magasságban lévő, Grönlandtól r távolságra elhelyezkedő, m tömegű darabkájának potenciális energiája egyrészt a Föld gravitációs terétől (mgh), másrészt Grönland gravitációs vonzásából $\left(-G\frac{m_{\text{jég}} m}{r}\right)$ származik:

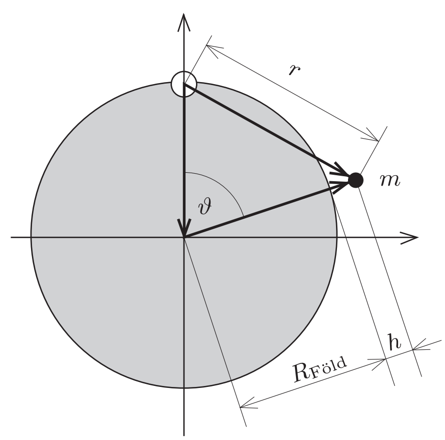
$$U = mgh - G\frac{m_{\text{jég}} m}{r},$$

ebből kifejezve a vízszint h magasságát:

$$h = h_0 + \frac{G m_{\text{jég}}}{gr},$$

ahol bevezettük a $h_0 = U/mg$ jelölést. A *2. ábrán* látható ϑ középponti szöggel az r távolság kifejezhető, ennek segítségével megkapható a vízmagasság θ-függése:

$$h(\vartheta) = h_0 + \frac{G m_{\text{jég}}}{2gR_{\text{F}} \left|\sin(\vartheta/2)\right|}.$$



2. ábra.

Az ismert adatokat és a Grönlandon található jég tömegét ($m_{\text{jég}} = \varrho_{\text{jég}} V_{\text{jég}} = 3{,}18 \cdot 10^{18}$ kg) behelyettesítve:

$$h(\vartheta) = h_0 + \frac{1{,}69 \text{ m}}{\left|\sin(\vartheta/2)\right|}.$$

A Grönland és Koppenhága között lévő körívhez tartozó ϑ középponti szög:

$$\vartheta = \frac{3500 \text{ km}}{R_{\text{F}}} = 31{,}4°,$$

Grönland és a tőle legtávolabbi földrajzi pont közötti középponti szög pedig 180°, ezzel a keresett vízszintkülönbség:

$$h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = h_0 + \frac{1{,}69 \text{ m}}{\left|\sin(31{,}4°/2)\right|} - \left(h_0 + \frac{1{,}69 \text{ m}}{\left|\sin(180°/2)\right|}\right) = 4{,}56 \text{ m}.$$