2. feladat. Plazmonos gőzfejlesztő készülék

2.1. Az ezüst nanogolyócska térfogata: $V = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = 4{,}19\cdot 10^{-24}$ m^3, tömege: $M = \varrho_{\mathrm{Ag}}V = 4{,}39\cdot 10^{-20}$ kg; a nanogolyócskában található ezüstionok száma: $N = N_A\dfrac{M}{M_{\mathrm{Ag}}} = 2{,}45\cdot 10^5$; töltéssűrűsége: $\varrho = eN/V = 9{,}38\cdot 10^9$ Cm^{-3}; a szabad elektronok koncentrációja: $n = N/V = 5{,}85\cdot 10^{28}$ m^{-3}, összes töltése: $Q = -eN = -3{,}93\cdot 10^{-14}$ C; a töltéshordozók összes tömege: $m_0 = m_eN = 2{,}23\cdot 10^{-25}$ kg.

2.2. Egy R sugarú, homogén töltéseloszlású, pozitív ϱ töltéssűrűségű gömb középpontjától $|\mathbf{r}| < R$ távolságban lévő pontban az elektromos térerősség nagysága a Gauss-törvényből kapható meg:

$$E_+(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3}r^3\frac{\varrho}{\varepsilon_0},$$

a térerősség irányát is figyelembe véve:

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}.$$

Hasonlóan számolható az R_1 sugarú, $-\varrho$ töltéssűrűségű gömb tere a gömbön belül, annak középpontjától $|\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_d|$ távolságban: $\boldsymbol{E}_- = -\dfrac{\varrho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_d)$. Az R_1 sugarú gömbön belül az eredő elektromos térerősség tehát:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_d,$$

a keresett együttható értéke tehát $A = 1/3$.

2.3. Az előző részfeladat eredménye szerint az elektromos tér a töltéssemleges tartományban $\boldsymbol{E} = \big(\varrho/(3\varepsilon_0)\big)\boldsymbol{x}_d$ értékű, így az ebben a térrészben elhelyezkedő, közelítőleg Q össztöltésű elektronfelhőre ható erő:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} = -eN\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_d = -\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3e^2n^2\boldsymbol{x}_d.$$

Az elektronfelhő elmozdítása során ennek az erőnek a (-1)-szeresét kell kifejtenünk. Mivel a szükséges erő nagysága az elmozdulással egyenesen arányos, ezért számolhatunk úgy, mintha végig a maximális erő felével történt volna a munkavégzés:

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{F}_{\max}|x_d = \frac{2\pi}{9\varepsilon_0}R^3e^2n^2x_d^2.$$

2.4. Az ezüstgolyócska belsejében az eredő elektromos térnek zérusnak kell lennie, így az elmozdított töltések által a töltéssemleges térrészben keltett térerősség $-\boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{e}_x$. A **2.2.** rész eredményét felhasználva kifejezhető az elektronfelhő x_p elmozdulása:

$$x_p = \frac{3\varepsilon_0}{\varrho}E_0 = \frac{3\varepsilon_0}{en}E_0.$$

A kicsiny x_p elmozdulás közben a golyócska közepén átmenő (y,z) síkon közelítőleg egy πR^2x_p térfogatú hengerben található elektronok haladnak át. Ezek (negatív) össztöltése: $-\Delta Q = -\pi R^2x_p\,\varrho = -\pi R^2enx_p$.

2.5*a*. Feleltessük meg a töltések széthúzásakor végzett W_{el} munkát a kondenzátor energiájának, a szétválasztott ΔQ töltést pedig a kondenzátor töltésének! A $W_{\mathrm{el}} = \Delta Q^2/(2C)$ összefüggést használva a nanogolyócskát helyettesítő kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{\mathrm{el}}} = \frac{9\pi}{4}\varepsilon_0R = 6{,}26\cdot 10^{-19}\ \mathrm{F}.$$

2.5*b*. A kondenzátorra vonatkozó $V_0 = \Delta Q/C$ összefüggést és az eddigi eredményeket felhasználva:

$$V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{\pi R^2enx_p}{\frac{9\pi}{4}\varepsilon_0R} = \frac{4}{3}R\left(\frac{enx_p}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{4}{3}RE_0.$$

2.6*a*. Az elektronfelhőben található N darab elektron összes mozgási energiája:

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m_ev^2N = \frac{2\pi}{3}R^3nm_ev^2.$$

Az I áramerősség nagysága megkapható, ha elosztjuk a πR^2 alapterületű, $v\Delta t$ magasságú hengerben található elektronok össztöltését a Δt időtartammal:

$$I = \pi R^2env.$$

2.6*b*. A mozgó elektronok W_{kin} kinetikus energiája megfeleltethető egy L induktivitású, I árammal átjárt vezető $LI^2/2$ energiájával, ebből:

$$L = \frac{2W_{\mathrm{kin}}}{I^2} = \frac{4m_e}{3\pi Rne^2} = 2{,}57\cdot 10^{-14}\ \mathrm{H}.$$

2.7*a*. A helyettesítő áramkör C kapacitásából és L induktivitásából a rezonanciafrekvencia kiszámítható:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{ne^2}{3m_e\varepsilon_0}}.$$

2.7*b*. Behelyettesítve $\omega_p = 7{,}88 \cdot 10^{15}$ rad/s adódik, a hullámhosszra pedig $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = 239$ nm-t kapunk.

2.8*a*. Egyetlen elektron időátlagolt kinetikus energiája $\frac{1}{2}m_e\langle v^2\rangle$. Mivel az ütközések egy-egy elektronnál τ időnként történnek, és összesen N darab elektronunk van, az energiadisszipáció teljesítménye:

$$P_{\text{hő}} = \frac{1}{2\tau}Nm_e\langle v^2\rangle = \frac{2\pi}{3\tau}R^3nm_e\langle v^2\rangle.$$

Az áramerősség négyzetének időátlagát a **2.6*a*.** részben kapott eredményből származtathatjuk:

$$\big\langle I^2\big\rangle = \big(\pi R^2en\big)^2\langle v^2\rangle.$$

2.8*b*. A Joule-hőre vonatkozó $P_{\text{hő}} = R_{\text{hő}}\big\langle I^2\big\rangle$ összefüggést használva:

$$R_{\text{hő}} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2R\tau} = 2{,}46\,\Omega.$$

2.9. Az előző részhez hasonlóan induljunk ki a $P_{\text{szórt}} = R_{\text{szórt}}\big\langle I^2\big\rangle$ összefüggésből!

$$R_{\text{szórt}} = \frac{P_{\text{szórt}}}{\big\langle I^2\big\rangle} = \frac{Q^2x_0^2\omega_p^4}{12\pi\varepsilon_0c^3\big(\pi R^2en\big)^2\langle v^2\rangle}.$$

Használjuk fel, hogy $v(t) = -x_0\omega_p\sin(\omega_pt)$, így $\langle v^2\rangle = x_0^2\omega_p^2/2$, valamint, hogy $Q = (4\pi/3)R^3e\,n$. Behelyettesítve, egyszerűsítés után kapjuk:

$$R_{\text{szórt}} = \frac{8}{27}\frac{R^2\omega_p^2}{\pi\varepsilon_0c^3} = 2{,}45\,\Omega.$$

2.10*a*. A nanogolyócskát gerjesztő fény frekvenciája éppen megegyezik a rezgő elektronfelhő rezonanciafrekvenciájával, ezért a helyettesítő áramkör eredő impedanciája tisztán ohmikus, $R_{\text{hő}} + R_{\text{szórt}}$ értékű. A helyettesítő feszültségforrás feszültségének amplitúdója **2.5*b*.** alapján $V_0 = 4RE_0/3$, effektív értéke pedig a szinuszos változás miatt $V_0/\sqrt{2}$. A két fogyasztó között az ellenállások arányában oszlik meg a feszültség, így az időátlagolt teljesítmények a következőképp számolhatók:

$$P_{\text{hő}} = \frac{\Big(\frac{R_{\text{hő}}}{R_{\text{hő}}+R_{\text{szórt}}}\frac{V_0}{\sqrt{2}}\Big)^2}{R_{\text{hő}}} = \frac{8R_{\text{hő}}R^2}{9\big(R_{\text{hő}}+R_{\text{szórt}}\big)^2}E_0^2,$$

$$P_{\text{szórt}} = \frac{R_{\text{szórt}}}{R_{\text{hő}}}P_{\text{hő}} = \frac{8R_{\text{szórt}}R^2}{9\big(R_{\text{hő}}+R_{\text{szórt}}\big)^2}E_0^2.$$

A beeső fény amplitúdóját a Poynting-vektor nagyságából kaphatjuk meg:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{\varepsilon_0c}}.$$

2.10*b*. A megadott adatokat a **2.10*a*.** részben kapott kifejezésekbe helyettesítve a $P_{\text{hő}} = 6{,}82$ nW, $P_{\text{szórt}} = 6{,}81$ nW és $E_0 = 27{,}4$ kV/m eredményeket kapjuk.

2.11*a*. A tartályban lévő nanogolyócskák száma $N_{\text{ng}} = ah^2n_{\text{ng}} = 7{,}3 \cdot 10^{11}$, a teljes fejlődő Joule-hő tehát $P_{\text{gőz}} = N_{\text{ng}}P_{\text{hő}} = 4{,}98$ kW. Ez a teljesítmény a víz felmelegítésére, elforralására és a gőz felmelegítésére fordítódik:

$$P_{\text{gőz}} = m_{\text{gőz}}\big(c_{\text{víz}}(T_{100} - T_{\text{hő}}) + L_{\text{víz}} + c_{\text{gőz}}(T_{\text{gőz}} - T_{100})\big),$$

ebből az időegység alatt képződő vízgőz tömege:

$$m_{\text{gőz}} = \frac{P_{\text{gőz}}}{c_{\text{víz}}(T_{100} - T_{\text{hő}}) + L_{\text{víz}} + c_{\text{gőz}}(T_{\text{gőz}} - T_{100})} = 1{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/s}.$$

2.11*b*. A beeső fény teljes teljesítménye $h^2S = 10{,}0$ kW, ebből csak a gőzképződésre fordítódó $P_{\text{gőz}} = 4{,}98$ kW a hasznos teljesítmény, így a gőzfejlesztő készülék hatásfoka $\eta = 4{,}98\ \text{kW}/10{,}0\ \text{kW} = 0{,}498$.