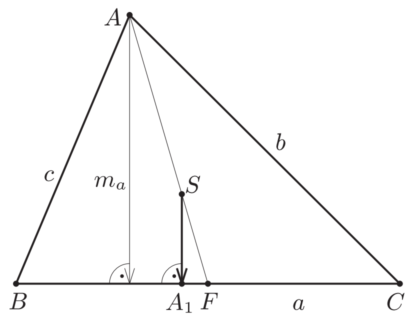
Megoldás. Jelölje a háromszög területét T, az A csúcsból induló magasságát m_a, a BC oldal felezőpontja pedig legyen F.

Nagyítsuk az $\overrightarrow{SA_1}$ vektort F-ből háromszorosára. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, ezért S képe A lesz, a merőlegesség miatt pedig A_1 képe az ABC háromszög A csúcsából induló magasságának a talppontja (*1. ábra*). Vagyis $3|\overrightarrow{SA_1}| = m_a$. Ezért a $2T = am_a$ képletet felhasználva kapjuk, hogy

$$a^2\overrightarrow{SA_1} = a\frac{2T}{3|\overrightarrow{SA_1}|}\overrightarrow{SA_1} = \frac{2T}{3}a\frac{\overrightarrow{SA_1}}{|\overrightarrow{SA_1}|}.$$

Ugyanezeket az átalakításokat a másik két tagra is elvégezve a bizonyítandó állítás

$$\frac{2T}{3}\left(a\frac{\overrightarrow{SA_1}}{|\overrightarrow{SA_1}|} + b\frac{\overrightarrow{SB_1}}{|\overrightarrow{SB_1}|} + c\frac{\overrightarrow{SC_1}}{|\overrightarrow{SC_1}|}\right) = \mathbf{0}. \tag{1}$$



1. ábra

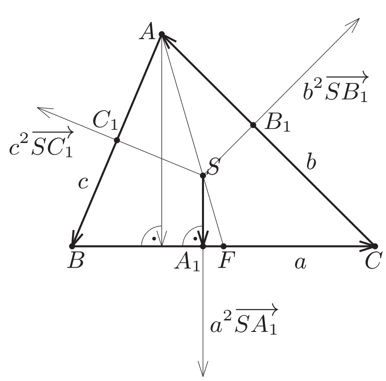
Az $a\frac{\overrightarrow{SA_1}}{|\overrightarrow{SA_1}|}$ vektor hossza a, vagyis megegyezik a háromszög BC oldalának hosszával, iránya pedig a $\overrightarrow{BC}$ vektor $-90°$-os elforgatottja, és hasonló igaz a zárójelben szereplő másik két vektorra is (*2. ábra*). Ezért – egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor $-90°$-os elforgatottját $\mathbf{v}'$-vel jelölve –

$$a\frac{\overrightarrow{SA_1}}{|\overrightarrow{SA_1}|} + b\frac{\overrightarrow{SB_1}}{|\overrightarrow{SB_1}|} + c\frac{\overrightarrow{SC_1}}{|\overrightarrow{SC_1}|} = \overrightarrow{BC}' + \overrightarrow{CA}' + \overrightarrow{AB}'.$$

Vektorok adott szögű elforgatottjainak összege megegyezik az összegük adott szögű elforgatottjával, ezért

$$\overrightarrow{BC}' + \overrightarrow{CA}' + \overrightarrow{AB}' = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)' = \mathbf{0}' = \mathbf{0},$$

vagyis az (1) egyenlőség teljesül.



2. ábra

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.