Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a háromszög derékszögű.

Legyenek a háromszög oldalai a, b és c, kerülete $2s$, területe pedig T. Ekkor a körök sugaraira vonatkozó ismert képletek szerint

$$r_a = \frac{T}{s-a}, \quad r_b = \frac{T}{s-b}, \quad r_c = \frac{T}{s-c} \quad \text{és} \quad R = \frac{abc}{4T}.$$

Ezeket behelyettesítve az $r_b + r_c = 2R$ feltételbe, átrendezve, majd alkalmazva Héron képletét, mely szerint

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

végül pedig felhasználva az $(s-c)+(s-b)=a$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}
\frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} = \frac{abc}{2T},\\
\frac{4T^2}{s-b} + \frac{4T^2}{s-c} = 2abc,\\
4s(s-a)\big((s-c)+(s-b)\big) = 2abc,\\
4s(s-a) = 2bc, \quad \text{azaz} \quad 2s(2s-2a) - 2bc = 0.
\end{gathered}$$

Itt $2s - 2a = b + c - a$, ezért

$$\begin{aligned}
0 &= 2s(2s-2a) - 2bc = (b+c+a)(b+c-a) - 2bc =\\
&= (b+c)^2 - a^2 - 2bc = b^2 + c^2 - a^2,
\end{aligned}$$

vagyis Pitagorasz tételének megfordítása szerint a háromszög a oldalával szemközti szöge derékszög.

Az $r_a + r_b = 3R$ feltételből kiindulva ugyanezeket az átalakításokat végrehajtva kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}
\frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b} = \frac{3abc}{4T},\\
\frac{4T^2}{s-a} + \frac{4T^2}{s-b} = 3abc,\\
4s(s-c)\big((s-b)+(s-a)\big) = 3abc,\\
4s(s-c) = 3ab, \quad \text{azaz} \quad a^2 + b^2 - c^2 - ab = 0.
\end{gathered}$$

Mivel $a^2 = b^2 + c^2$, az utolsó egyenlőséget átalakítva kapjuk, hogy

$$2b^2 - ab = 0, \quad \text{azaz} \quad b(2b-a) = 0,$$

amiből $b > 0$ miatt következik, hogy $b = a/2$. Így a háromszög b befogójával szemközti hegyesszögének szinusza $1/2$, vagyis ez a szög $30°$.

Tehát a háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az ilyen szögekkel rendelkező háromszögek oldalaira $a = 2b$ és $c = \sqrt{3}b$ teljesül, a körök sugarai pedig

$$r_a = \frac{(3+\sqrt{3})b}{2}, \quad r_b = \frac{(3-\sqrt{3})b}{2}, \quad r_c = \frac{(1+\sqrt{3})b}{2} \quad \text{és} \quad R = b,$$

amik kielégítik a feladat feltételeit.