Megoldás. Legyen $\sqrt[5]{39-x}=a \;\Rightarrow\; 39-x=a^5$, $\sqrt[5]{x-6}=b \;\Rightarrow\; x-6=b^5$. Ekkor az eredeti egyenlet:

$$\frac{a^5b-ab^5}{a-b}=30.$$

Ugyanakkor az is teljesül, hogy $a^5+b^5=33$. Az $a-b\neq 0$, mert a nevezőben nem állhat nulla. Az egyenlet bal oldala egyszerűsíthető is $(a-b)$-vel:

$$\frac{a^5b-ab^5}{a-b}=\frac{ab\left(a^4-b^4\right)}{a-b}=\frac{ab(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a-b}=ab(a+b)\left(a^2+b^2\right)=30.$$

Ezt osztva a feltételből kapott $a^5+b^5=33$ egyenlettel (egyik tényező sem lehet nulla, hiszen az egyenletek jobb oldalán nullától különböző szám áll) kapjuk, hogy

$$\frac{ab(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)}=\frac{30}{33}=\frac{10}{11}.$$

Egyszerűsítés, beszorzás és rendezés után olyan homogén negyedfokú egyenletet kapunk, amelyben az együtthatók szimmetrikusan helyezkednek el.

$$10a^4-21a^3b+10a^2b^2-21ab^3+10b^4=0.$$

Mivel b nem nulla, az egyenletet eloszthatjuk b^4-nel. Ezután pedig bevezetünk $\frac{a}{b}$ helyett egy új k ismeretlent:

$$10k^4-21k^3+10k^2-21k+10=0.$$

Ez egy ún. reciprokegyenlet, amely minden esetben visszavezethető másodfokú egyenletre. Mivel $k=0$ nem megoldása az egyenletnek, oszthatunk k^2-tel és a tagokat át is csoportosítjuk.

$$10k^2+\frac{10}{k^2}-21k-\frac{21}{k}+10=0,$$
$$10\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)-21\left(k+\frac{1}{k}\right)+10=0,$$
$$10\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-21\left(k+\frac{1}{k}\right)-10=0.$$

Most $u=k+\frac{1}{k}$ helyettesítéssel már másodfokú egyenlethez jutunk:

$$10u^2-21u-10=0.$$

Az egyenlet megoldásai $u=\frac{5}{2}$ és $u=-\frac{2}{5}$. Ez utóbbi nem ad valós megoldást, mert $k+\frac{1}{k}$ valós számok esetében abszolút értékben legalább 2. Az elsőből

$$k+\frac{1}{k}=\frac{5}{2},\quad \text{azaz}\quad k=2,\quad k=\frac{1}{2}.$$

Innen már adódnak az eredeti egyenlet megoldásai:

$$\frac{\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{x-6}}=2 \implies \frac{39-x}{x-6}=32 \implies x=7,$$
$$\frac{\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{x-6}}=\frac{1}{2} \implies \frac{39-x}{x-6}=\frac{1}{32} \implies x=38.$$

Behelyettesítéssel adódik, hogy mindkét gyök valóban kielégíti az egyenletet.