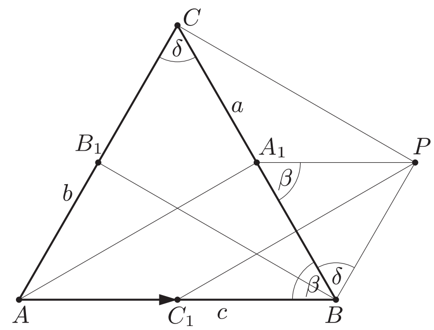
Megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögre $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{0}$ teljesül. Toljuk el az AA_1 szakaszt $\overrightarrow{AC_1}$-gyel, ekkor A_1 képe P, A képe C_1 lesz. Az eltolás miatt $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{C_1P}$.



1. ábra

Mivel $\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1P}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ és $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{0}$, továbbá $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{C_1P}$, azért $\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{0}$. Tehát az AC_1PA_1 és $BPCB_1$ négyszögek paralelogrammák.

Az előbbiből következik, hogy $AB \parallel A_1P$, amiből $\beta = ABA_1\sphericalangle = BA_1P\sphericalangle$, és $BP \parallel AC$, továbbá $PBC\sphericalangle = BCA\sphericalangle = \delta$. Vagyis $ABC\triangle \sim PA_1B\triangle$.

A PA_1B háromszög oldalai meghatározhatók a szögfelező-tétel segítségével:

$$A_1B=\frac{ac}{b+c}, \quad BP=CB_1=\frac{ab}{a+c} \quad \text{és} \quad A_1P=AC_1=\frac{bc}{a+b}.$$

Felhasználva az előző hasonlóságot:

$$\begin{aligned}
a:b:c&=\frac{ac}{b+c}:\frac{ab}{a+c}:\frac{bc}{a+b},\\
a:b&=\frac{ac}{b+c}:\frac{ab}{a+c} \implies a(b+c)=c(a+c) \implies ab=c^2,\\
a:c&=\frac{ac}{b+c}:\frac{bc}{a+b} \implies b(b+c)=c(a+b) \implies b^2=ac.
\end{aligned}$$

Az a, b, c számokra $ab=c^2$ és $b^2=ac$ egyszerre teljesül. Összeszorozva $ab^3=ac^3$, vagyis $b=c$, ezt visszahelyettesítve pedig $a=b=c$, vagyis a háromszög szabályos.