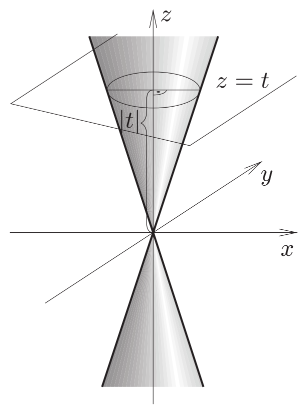
Megoldás. Kúpon azt a ponthalmazt értjük, amelynek alkotói teljes egyenesek, azaz a kúp a csúcsától kiindulva mindkét irányban végtelen. Ha ilyen kúpokra belátjuk feladatunk állítását, akkor az a „szokásos" véges kúpokra is teljesül, hiszen minden véges kúp kiterjeszthető végtelen kúppá.

Először meghatározzuk a térbeli derékszögű koordinátarendszerben egy olyan egyenes körkúpnak az egyenletét, amelynek tengelye a z tengely, csúcsa az origó, alkotói pedig a z-tengellyel α szöget zárnak be. Ekkor a kúpnak a $Z = t$ síkkal vett metszete egy olyan körvonal, amelynek sugara $r = |t| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (*1. ábra*). Ebben a síkban a körvonal egyenlete $X^2 + Y^2 = r^2 = t^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$, a kúp ezen körvonalak uniója, egyenlete tehát $X^2 + Y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha Z^2$. A koordinátarendszer elmozgatására vonatkozó transzformációs képletek alapján ebből az is következik, hogy ha egy olyan kúpnak az egyenletét írjuk fel, amelynek tengelye a z tengely, csúcsa pedig az $(u; v; w)$ pont, akkor a kúp egyenlete

$$(X - u)^2 + (Y - v)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha (Z - w)^2$$

alakú lesz.



1. ábra

Visszatérve feladatunkra vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a z tengely legyen párhuzamos a kúpok tengelyeivel és az első kúp csúcsa legyen az origó. Ha a második kúp csúcsának koordinátái $(a; b; c)$, a kúpok alkotóinak a tengellyel bezárt szögei pedig α és β, akkor a kúpok egyenletei

(1) $$X^2 + Y^2 - AZ^2 = 0 \quad \text{és} \quad (X - a)^2 + (Y - b)^2 - B(Z - c)^2 = 0,$$

ahol $A = \operatorname{tg}^2 \alpha$ és $B = \operatorname{tg}^2 \beta$, s mivel a kúpok nyílásszöge különböző, ezekről tudjuk, hogy $0 \neq A \neq B \neq 0$.

A két kúp közös pontjainak koordinátái mindkét egyenletet kielégítik, sőt kielégítik azok tetszőleges lineáris kombinációját is (vagyis azokat az egyenleteket is, amelyeket úgy kapunk, hogy a két egyenletet tetszőleges számokkal megszorozzuk, majd az így kapott egyenleteket összeadjuk).

Szorozzuk be az első egyenletet egy λ, a másodikat pedig egy μ számmal úgy, hogy utána összeadva az egyenleteket X^2, Y^2 és Z^2 együtthatója egyaránt 1 legyen. Ehhez a $\lambda + \mu = -A\lambda - B\mu = 1$ feltételeket kell kielégíteni, ami a

$$\lambda = \frac{B+1}{B-A} \quad \text{és} \quad \mu = -\frac{A+1}{B-A}$$

választással elérhető.

A két körkúp metszéspontjainak koordinátái tehát kielégítik az így kapott

$$\left(X^2 - 2\mu a X + \mu a^2\right) + \left(Y^2 - 2\mu b Y + \mu b^2\right) + \left(Z^2 + 2\mu B c Z - \mu B c^2\right) = 0$$

egyenletet. Ezt az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

(2) $$\begin{aligned}(X - \mu a)^2 + (Y - \mu b)^2 + (Z + \mu B c)^2 &= \\ = \left(\mu^2 - \mu\right) a^2 + \left(\mu^2 - \mu\right) b^2 + \left(\mu^2 B^2 + \mu B\right) c^2.\end{aligned}$$

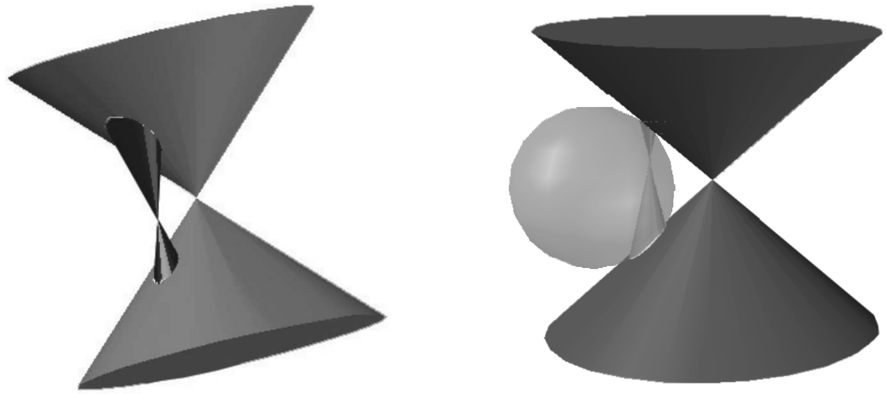
Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mu^2 - \mu &= \frac{(A+1)^2 + (A+1)(B-A)}{(B-A)^2} = \frac{(A+1)(B+1)}{(B-A)^2} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\operatorname{tg}^2 \beta + 1)}{(B-A)^2} > 0\end{aligned}$$

és

$$\mu^2 B^2 + \mu B = \frac{(A+1)^2 B^2 - (A+1)B(B-A)}{(B-A)^2} = \frac{AB(A+1)(B+1)}{(B-A)^2} > 0,$$

tehát a (2) egyenlet jobb oldalán $(a; b; c) = (0; 0; 0)$ esetén 0, ha pedig $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, akkor pozitív szám áll. Ezért ez az egyenlet egy (esetleg elfajuló) gömb egyenlete.



2. ábra

Tehát két párhuzamos tengelyű, különböző nyílásszögű egyenes körkúp közös pontjai mindig illeszkednek egy gömbfelületre. Ha a két kúp csúcspontja egybeesik, akkor egyetlen közös pontjuk van (de persze bármely egypontú halmaz is tekinthető egy alkalmas gömb részhalmazának).

Megjegyzés. Ha a két kúp nyílásszöge megegyezik, de a kúpok nem esnek egybe, akkor közös pontjaik egy síkon helyezkednek el. Ebben az esetben ugyanis az (1) egyenletekben mindhárom négyzetes tag együtthatója megegyezik. Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ miatt egy olyan lineáris egyenletet kapunk, melyben az X, Y és Z változók közül legalább az egyik szerepel. Viszont a lineáris egyenletek síkot határoznak meg, tehát a közös pontok ebben az esetben egy síkon vannak.