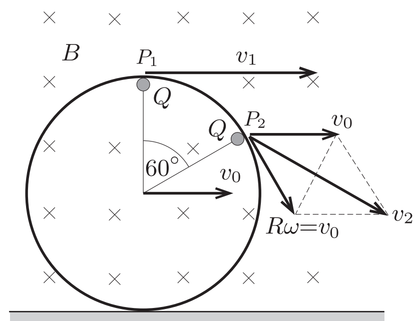
I. megoldás. *a*) A mágneses térben $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozgó, Q töltésű golyóra ható erő a sebességvektorra is és a mágneses indukcióvektorra is merőleges, nagysága $F = QBv$. (Kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{v}$ merőlegesek egymásra, és az egyértelműség kedvéért feltételezzük, hogy $Q > 0$.)

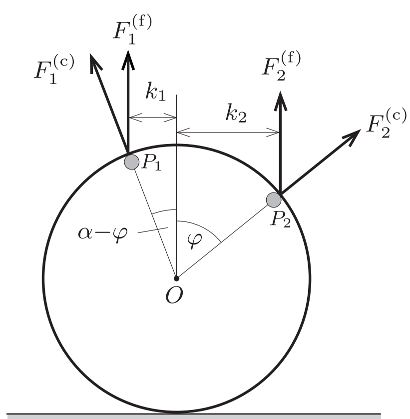
A golyók sebessége az R sugarú karika középpontjának v_0 nagyságú vízszintes sebességéből és a tiszta gördülés $R\omega = v_0$ nagyságú, érintő irányú sebességéből tehető össze (*1. ábra*). A P_1 pontban ez $v_1 = 2v_0$ nagyságú, a P_2 pontban pedig $v_2 = \sqrt{3}\,v_0$ (egy szabályos háromszög kétszeres magasságának megfelelő) nagyságú sebességvektort eredményez, így a kérdéses erők:

$$F_1 = QBv_1 = 2QBv_0,$$
$$F_2 = QBv_2 = \sqrt{3}\,QBv_0.$$



1. ábra

b) A karika bármely pontjának sebességvektora két vektor (a haladó mozgás és a forgómozgás kerületi sebességének) összegeként állítható elő. A karikához rögzített töltött testre ható mágneses Lorentz-erőt az egyes sebességkomponensekhez tartozó mágneses erők vektori összegeként is megkaphatjuk (szuperpozíció-elv). Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_2 ponthoz tartozó sugár φ szöget zár be a függőlegessel, a P_1-hez tartozó sugár ehhez képest α szöggel „lemarad" (*2. ábra*). Keressük φ azon értékét (vagy értékeit), amely(ek)nél az eredő erőnek *nincs* forgatónyomatéka a karika O középpontjára vonatkoztatva.



2. ábra

Az érintő irányú sebességvektorokhoz tartozó $F_1^{(c)}$ és $F_2^{(c)}$ erők sugár irányúak (centrálisak), az O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékuk *nulla.* A vízszintes (transzlációs) sebességnek megfelelő Lorentz-erő függőleges irányú, és a nagysága a karika minden pontjánál ugyanakkora:

$$F_1^{(f)} = F_2^{(f)} = QBv_0.$$

Az erők eredőjének akkor lesz nulla a forgatónyomatéka, ha a megfelelő erőkarok megegyeznek:

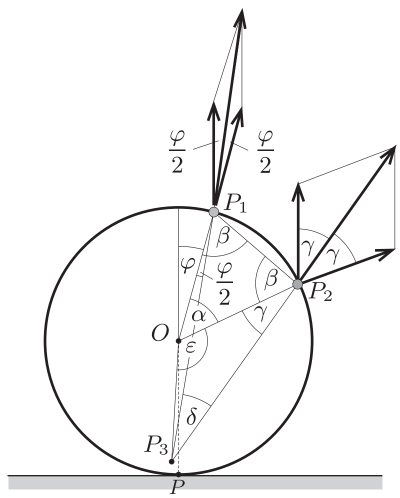
$$k_1 = k_2, \qquad \text{vagyis} \qquad \sin(\alpha - \varphi) = \sin\varphi.$$

Ebből – trigonometrikus átalakítások után – a $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \operatorname{tg}\varphi$ egyenlet következik, amelynek megoldása:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \qquad \text{vagy} \qquad \varphi = 180^\circ + \frac{\alpha}{2} = 210^\circ.$$

Mindkét helyzetben a golyók a karika függőleges átmérőjére nézve *szimmetrikusan* helyezkednek el. Sebességük nagysága a „felső" helyzetben nagyobb, ilyenkor az eredő erő nagysága $\left(2 + \sqrt{3}\,\right)Qv_0B$, az „alsó" szimmetrikus helyzetben pedig csak $\left(2 - \sqrt{3}\,\right)Qv_0B$.

c) Tekintsük a karika azon helyzetét, amelyben a P_1 pontba húzott sugár φ szöget, a P_2 ponthoz tartozó sugár pedig $\varphi+\alpha$ szöget zár be a függőlegessel (*3. ábra*). Megmutatjuk, hogy a ponttöltésekre ható mágneses erők hatásvonalainak P_3 metszéspontja ***tetszőleges*** φ szög esetén a karika és a talaj P érintkezési pontjával esik egybe. (Az ábrát szándékosan kicsit eltorzítottuk, nehogy a bizonyítandó állítást a helyes ábráról indoklás nélkül olvassuk le.)



3. ábra

Használjuk ki, hogy az egyes ponttöltésekre ható mágneses erő két komponense (a tiszta gördülés miatt) ugyanakkora, eredőjük tehát felezi a közöttük lévő φ, illetve $2\gamma=\varphi+\alpha$ nagyságú szöget. Az OP_1P_2 háromszög egyenlő szárú, így

$$\beta=\frac{180^\circ-\alpha}{2}.$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög belső szögeinek összegéből

$$\frac{180^\circ-\alpha}{2}-\frac{\varphi}{2}+\frac{180^\circ-\alpha}{2}+\frac{\alpha+\varphi}{2}+\delta=180^\circ, \qquad \text{vagyis} \qquad \delta=\frac{\alpha}{2}$$

adódik. Ezek szerint (a P_1P_2 körívhez tartozó középponti és kerületi szögek tétele alapján) a P_3 pont a karikán helyezkedik el, méghozzá éppen a karika függőleges átmérőjének alsó végpontjánál, hiszen az OP_2P_3 háromszög belső szögeinek összegéből (kihasználva, hogy $OP_3P_1\sphericalangle=\varphi/2$):

$$\varepsilon+\frac{\varphi+\alpha}{2}+\frac{\varphi}{2}+\delta=180^\circ,$$

tehát

$$\varepsilon+\alpha+\varphi=180^\circ$$

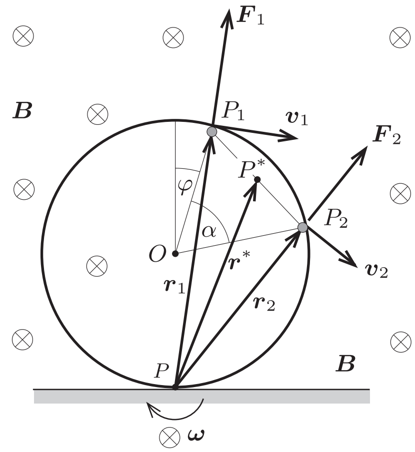
adódik. Ezzel beláttuk, hogy a P_3 pont P-vel esik egybe, vagyis a mágneses erők eredője a karika és a talaj érintkezési pontján halad át.

II. megoldás. A karika mozgása minden pillanatban leírható a talaj és a karika érintkezési pontja (a P pont) körüli forgómozgással. (Ezen a ponton átmenő és a karika síkjára merőleges tengelyt *pillanatnyi forgástengelynek* nevezik.) A szögsebesség nagysága nem függ a tengely választásától, értéke bármely tengely, így pl. a karika középpontján átmenő tengely körüli forgásra is $\omega=v_0/R$.

Jelöljük a P pontból P_1-be és P_2-be mutató vektorokat (a karika tetszőleges helyzeténél) $\boldsymbol{r}_1$-gyel és $\boldsymbol{r}_2$-vel, a P_1 és P_2 pontok közötti szakasz felezőpontját pedig P^*-gal (*4. ábra*). A P^* pont a karika O középpontjától $R\big(1+\sqrt{3}/2\big)$ távolságra helyezkedik el, és a P pontból P^*-ba mutató vektor

$$\boldsymbol{r}^*=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$$

módon adható meg.



4. ábra

A karika ω szögsebessége az ábra síkjára merőleges (tehát $\boldsymbol{B}$-vel párhuzamos) vektor, melynek segítségével a sebességek

$$\boldsymbol{v}_1 = \omega \times \boldsymbol{r}_1 \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \omega \times \boldsymbol{r}_2,$$

a megfelelő Lorentz-erők pedig

$$\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B} = Q(\omega \times \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{B}, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{F}_2 = Q\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B} = Q(\omega \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{B}.$$

Kihasználva, hogy $\boldsymbol{r}_{1,2}$ a karika síkjában fekvő vektorok, az egyes erők és az eredőjük így is felírható:

$$\boldsymbol{F}_1 = Q\omega B\,\boldsymbol{r}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = Q\omega B\,\boldsymbol{r}_2,$$
$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = Q\omega B\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = 2Q\omega B\,\boldsymbol{r}^*.$$

a) A feladat kitűzési ábráján (vagyis a $\varphi = 0$ helyzetben) $|\boldsymbol{r}_1| = 2R$ és $|\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{3}R$, így

$$|\boldsymbol{F}_1| = 2Qv_0B, \qquad \text{illetve} \qquad |\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{3}\,Qv_0B.$$

b) A mágneses erők eredőjének akkor nincs forgatónyomatéka a karika középpontjára vonatkoztatva, amikor $\boldsymbol{r}^*$ átmegy az O ponton, vagyis amikor $\boldsymbol{r}^*$ függőleges irányú vektor. Ez két esetben, $\varphi = -\alpha/2 = -30°$-nál és $\varphi = \pi - \alpha/2 = -150°$-nál következik be. A töltött golyócskák mindkét helyzetben a függőleges átmérőre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Az eredő erő nagysága

$$|\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2| = 2Q\omega B|\boldsymbol{r}^*| = QBv_0\big(2 \pm \sqrt{3}\,\big).$$

A pozitív előjel a felső, a negatív pedig az alsó szimmetrikus helyzetnek felel meg. Az eredő erő tehát a *felső helyzetben* lesz nagyobb.

c) Mivel mind az $\boldsymbol{F}_1$, mind pedig az $\boldsymbol{F}_2$ erő hatásvonala áthalad a P ponton, az eredő erő is ezen a ponton halad át, erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka a karika tetszőleges helyzetében *nulla*.