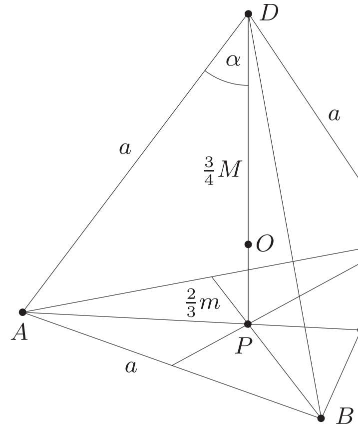
Megoldás. Jelöljük a szabályos tetraéder középpontjába helyezett ponttöltés *nagyságát* Q'-vel. Ez a töltés (az elrendezés szimmetriája miatt) nyilván egyensúlyban van. A többi töltés egyensúlyának vizsgálatához (ismét a szimmetriára hivatkozva) elegendő az egyik kiválasztott csúcspontban elhelyezkedő töltésre ható elektrosztatikus erők eredőjét kiszámítanunk, és annak eltűnését megkövetelnünk.



1. ábra

Ha a szabályos tetraéder oldalélének hosszát a-val jelöljük (*1. ábra*), akkor az oldallapjainak magassága

$$m = \overline{AR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a,$$

az oldallap súlypontjának és az egyik csúcsának távolsága pedig

$$\overline{AP} = \frac{2}{3}\,m = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a.$$

Eszerint a tetraéder magassága

$$M = \overline{DP} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}\,m\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a.$$

Az $\overline{AO} = \overline{OD}$ feltételből megkapható, hogy a tetraéder középpontja a magasságvonal negyedénél található, vagyis a tetraéder középpontjának és az egyik csúcsának távolsága

$$\overline{DO} = \frac{3}{4}\,M = \sqrt{\frac{3}{8}}\,a,$$

az 1. ábrán látható α szögre pedig fennáll:

$$\cos\alpha = \frac{M}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az egyik csúcspontban lévő Q nagyságú töltésre bármelyik másik csúcsnál található töltés

$$F = k\frac{Q^2}{a^2}$$

nagyságú taszítóerőt fejt ki. A három másik csúcs töltései által kifejtett erő eredője a szimmetria miatt a tetraéder középpontjával ellentétes irányba mutató és

$$F^* = 3F\cos\alpha = 3k\frac{Q^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

nagyságú (*2. ábra*). Ugyanilyen irányú és

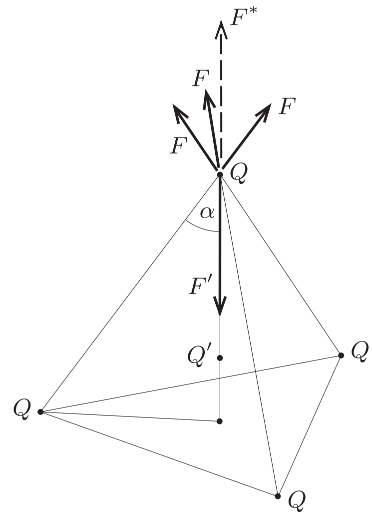
$$F' = k\frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)^2} = \frac{8k}{3}\,\frac{QQ'}{a^2}$$

nagyságú vonzóerőt fejt ki a tetraéder középpontjában elhelyezkedő Q' nagyságú, Q-val ellentétes előjelű töltés.

Az erőegyensúly feltétele: $F' = F^*$, ami

$$Q' = \sqrt{\frac{27}{32}}\,Q \approx 0{,}92\,Q$$

esetén teljesül.



2. ábra

A töltésrendszer teljes kölcsönhatási energiája a töltéspárok megfelelő energiáinak összege:

$$W = 6k\frac{Q^2}{a} - 4k\frac{QQ'}{\left(\frac{3M}{4}\right)} = k\frac{Q}{a}\left(6Q - 4\sqrt{\frac{8}{3}}\,Q'\right),$$

ami Q' fentebb kiszámított értékének behelyettesítésével – érdekes módon – nullának adódik:

$$W = k\frac{Q^2}{a}\left(6 - 4\sqrt{\frac{8}{3}}\,\sqrt{\frac{27}{32}}\right) = 0.$$

Megjegyzés. Belátható, hogy *bármely* töltésrendszer elektrosztatikus kölcsönhatási energiája *nulla,* ha a rendszer elemei (elektrosztatikus erőhatások szempontjából) egyensúlyban vannak. Ilyen esetben ugyanis a rendszer méreteit – kis lépésben – arányosan megnövelhetjük, méghozzá úgy, hogy eközben nem kell munkát végeznünk (hiszen a rendszer minden elemére ható eredő erő nulla). Ezt a méretnövelést egészen addig folytathatjuk, ameddig a töltések már nagyon távol („végtelen" messze) kerülnek egymástól, vagyis amikor a kölcsönhatási energiájuk nullává válik. Mivel mindezt munkavégzés nélkül tehetjük meg, az energia az eredeti állapotban is nulla kellett, hogy legyen.