I. megoldás. Jelöljük a nagyobb tömegű test tömegét M-mel, a kisebbét m-mel, a kezdeti távolságukat pedig R-rel!

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor az M tömegű test nem tud elmozdulni. Az energiák vizsgálatából kiindulva meghatározhatjuk a másik test v_m sebességét a testek közötti r távolság függvényében:

$$-\gamma\frac{mM}{R}=\frac{1}{2}mv_m^2-\gamma\frac{mM}{r},$$

ahonnan

$$v_m(r)=\sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}.$$

Ugyanezt a számítást a másik testre is elvégezhetjük. Ha az m tömegű test rögzített, akkor a tőle éppen r távolságban lévő másik (M tömegű) test sebessége

$$v_M(r)=\sqrt{2\gamma m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}$$

lesz.

Osszuk fel az R távolságot sok kicsiny, egyenként Δr hosszúságú szakaszra. Az egyes szakaszok legyenek olyan kicsinyek, hogy a mozgó testek sebességét a szakasz mentén jó közelítéssel állandónak tekinthessük. Azokat a szakaszokat, amelyek ugyanolyan messze vannak a másik (rögzített) testtől, a mozgó testek

$$\Delta t_m=\frac{\Delta r}{v_m(r)},$$

illetve

$$\Delta t_M=\frac{\Delta r}{v_M(r)}$$

időtartamok alatt futják be. A fenti két egyenletet elosztva egymással a

$$\frac{\Delta t_m}{\Delta t_M}=\sqrt{\frac{m}{M}}$$

arányossághoz jutunk, majd ebből összegzéssel (a mozgások teljes idejének ismert értékeit felhasználva) megkapjuk a testek tömegének arányát:

$$6\ \text{perc}=\sum\Delta t_m=\sqrt{\frac{m}{M}}\sum\Delta t_M=\sqrt{\frac{m}{M}}\cdot 8\ \text{perc},$$

vagyis

$$\frac{M}{m}=\left(\frac{8}{6}\right)^2=\frac{16}{9}.$$

Ha mindkét test szabadon elmozdulhat, vagyis nem hat rájuk külső erő, a rendszer kezdetben álló tömegközéppontja mindvégig nyugalomban marad. Amikor a két test összeütközik, az ütközés nyilván a tömegközéppont helyénél következhet be. Kezdetben az m tömegű test a tömegközépponttól

$$R_m=\frac{M}{m+M}R=\frac{16}{25}R$$

távolságra van, és a későbbiekben is fennmarad ez az arány: amikor a testek távolsága valamekkora r értékre csökken, a tömegközéppont és az m tömegű test távolsága $x=\frac{16}{25}r$ lesz. Az m tömegű testre ható erő ilyenkor

$$F(r)=-\gamma\frac{mM}{r^2}=-\gamma\frac{mM}{\left(\frac{25}{16}x\right)^2},$$

amit

$$F(x)=-\gamma\frac{m^*m}{x^2}$$

alakban is felírhatunk, ahol

$$m^*=\left(\frac{16}{25}\right)^2M.$$

Látható, hogy az m tömegű test (az M tömegű test vonzásának hatására) éppen úgy mozog, mintha a rögzítettnek tekinthető tömegközéppontban egy m^* tömegű fiktív test helyezkedne el, ennek gravitációs vonzóereje hatna az m tömegű testre, és a másik (az M tömegű) test egyáltalán nem is lenne jelen.

Mennyi idő alatt ütközik az m tömegű test az m^* tömegű (rögzített) vonzócentrumnak? Erre a kérdésre ismét az energiatétel felhasználásával kaphatunk választ. A test sebessége x távolságban a vonzócentrumtól:

$$v(x) = \sqrt{2\gamma m^* \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}.$$

(Kihasználtuk, hogy az indulásnál a test $x = R_m = \dfrac{16}{25}R$ távol volt a tömegközépponttól.)

Osszuk fel a test pályáját a kezdőponttól a tömegközéppontig kicsiny Δx hosszúságú szakaszokra. Egy-egy ilyen szakaszon

$$\Delta t(x) = \frac{\Delta x}{v(x)}$$

idő alatt halad végig a test, a mozgás teljes ideje pedig ezen kis időtartamok összege lesz. Hasonlítsuk össze ezeket az időtartamokat az első esetben (rögzített m tömegű testnél) kiszámított időtartamokkal! Ha az x távolságokat az ottani r értékek $\dfrac{16}{25}$ arányú kicsinyítésének választjuk, a szakaszok hosszának aránya

$$\frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{16}{25},$$

a sebességek aránya pedig

$$\frac{v(x)}{v_m(r)} = \frac{\sqrt{2\gamma m^* \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}}{\sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}} = \frac{\sqrt{2\gamma \left(\frac{16}{25}\right)^2 M \left(\frac{1}{\frac{16}{25}r} - \frac{1}{\frac{16}{25}R}\right)}}{\sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}} = \frac{4}{5}.$$

Ezek szerint

$$\frac{\Delta t(x)}{\Delta t_m(r)} = \frac{\Delta x}{\Delta r} \cdot \frac{v_m(r)}{v(x)} = \frac{16}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{5}.$$

Ez az arány a kicsiny időtartamok összegére is érvényes, tehát ha mindkét testet elengedjük, azok

$$T = \sum \Delta t(x) = \frac{4}{5} \sum \Delta t_m(r) = \frac{4}{5} \cdot 6 \text{ perc} = 4{,}8 \text{ perc}$$

múlva fognak találkozni.

II. megoldás. Jelöljük a keresett időt T_3-mal! Megmutatjuk, hogy nemcsak a feladatban szereplő gravitációs erő hatására mozgó testeknél, hanem *tetszőleges* erőtörvény esetén fennáll:

$$\frac{1}{T_3^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2},$$

vagyis a megadott T_1 és T_2 időtartamok mellett

$$T_3 = \sqrt{\frac{T_1^2 T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}} = 4{,}8 \text{ perc}.$$

Ha az r távolságra lévő testek között ható erő $F(r)$, akkor egy m tömegű test mozgásegyenlete (az origóban rögzített másik test erőterében):

$$ma = F(r). \tag{1}$$

Ezen egyenlet megoldását az teszi egyértelművé, hogy tudjuk: $t = 0$ pillanatban a test $r = R$ távol van az origótól (R ismert érték), és a test sebessége nulla. Az ütközésig eltelő időt az $r(T_1) = 0$ feltétel határozza meg.

Hasonlóan a másik test rögzítése esetén az M tömegű test mozgásegyenlete:

$$Ma = F(r). \tag{2}$$

Ha mindkét test elmozdulhat, akkor tömegközéppontban fognak összeütközni, így érdemes az egyik test tömegközépponttól mért távolságának időbeli változását vizsgálni. Ha mondjuk az m tömegű testet tekintjük, akkor annak a tömegközépponttól mért távolsága

$$x = \frac{M}{m+M} r,$$

ahol r a két test pillanatnyi távolságát jelöli. A test mozgásegyenlete:

$$ma_x = F(r).$$

Ebben az egyenletben a_x az x távolságnak megfelelő gyorsulás, vagyis $x(t)$ változási ütemének (a sebességének) változási üteme. Mivel az erőtörvényben az r távolság szerepel, célszerű a gyorsulást is erre a mennyiségre vonatkoztatni. Kihasználva x és r arányosságát, a gyorsulások kapcsolata:

$$a_x = \frac{M}{m+M} a_r,$$

és a mozgásegyenlet

$$ma_r = \frac{m+M}{M} F(r),$$

amit az $a_r \equiv a$ jelöléssel így is írhatunk:

$$\frac{mM}{m+M}\, a = F(r). \tag{3}$$

A fenti képletben szereplő $\dfrac{mM}{m+M}$ kifejezést a két testből álló rendszer ***redukált tömegének*** nevezik. Ez a kifejezés a tömegeket szimmetrikusan tartalmazza, emiatt az M tömegű test mozgásegyenlete – az r távolságnak megfelelő gyorsulással kifejezve – ugyancsak a (3) egyenlet.

Az (1)–(3) egyenletek csak a bennük szereplő tömegekben különböznek egymástól. Ez a különbség azonban egy trükk segítségével „eltüntethető”. Ha ugyanis a testek mozgásáról k-szoros lassítású videofelvételt készítünk, majd azt normál sebességgel játsszuk le, vagyis a valódi t idő helyett a $t' = t/k$ mennyiség függvényében írjuk le a mozgást, akkor a vesszős „időhöz” tartozó sebességek és gyorsulások mások lesznek, mint az igazi sebességek és gyorsulások:

$$v' = \frac{\Delta r}{\Delta t'} = \frac{\Delta r}{\Delta(t/k)} = k\frac{\Delta r}{\Delta t} = kv,$$

illetve

$$a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{\Delta(kv)}{\Delta(t/k)} = k^2\frac{\Delta v}{\Delta t} = k^2\, a.$$

Ennek megfelelően pl. az (1) egyenlet ilyen alakot ölt:

$$\frac{m}{k^2}\, a' = F(r),$$

ami $k = \sqrt{m}$ választással különösen egyszerű lesz:

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{m}. \tag{1'}$$

Hasonló módon az M tömegű test mozgásegyenlete (rögzített m mellett):

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{M}, \tag{2'}$$

és végül mindkét test szabad mozgása esetén:

$$a' = F(r), \quad \text{ha} \quad k = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}. \tag{3'}$$

Az $(1')$, $(2')$ és $(3')$ egyenletek azonos alakja (és az azonos kezdőfeltételek, nevezetesen $r(0) = R$ és $v'(0) = 0$) miatt az összeütközések az egyenletekben szereplő vesszős időben mérve *ugyanakkor,* egy bizonyos $t' = T_0$ „pillanatban” következnek be. Visszatérve a valódi időváltozóra ez annyit jelent, hogy a három esethez tartozó időtartamok:

$$T_1 = \sqrt{m}\, T_0, \qquad T_2 = \sqrt{M}\, T_0 \qquad \text{és} \quad T_3 = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}\, T_0.$$

Innen (T_0 kiküszöbölésével) a bizonyítandó

$$\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{T_3^2}$$

összefüggéshez jutunk.

A fenti, tetszőleges erőtörvénynél érvényes relációt speciális esetekben, pl. a távolsággal arányos rugalmas erőnél, vagy a távolságtól független F_0 erőnél közvetlenül is igazolhatjuk, hiszen ezeknél a mozgás a jól ismert harmonikus rezgőmozgás, illetve az egyenletesen gyorsuló mozgás. Máskor (pl. a Newton-féle gravitációs vonzásnál) az időtartamok kiszámítása nem ilyen egyszerű, de a Kepler-törvények alkalmazásával, vagy az I. megoldásban bemutatott módszerrel (az energiamegmaradás törvényének felhasználásával) megoldható.