Megoldás. A feladat kérdésére a válasz igenlő.

(1) Legyen k pozitív egész szám. Először azt mutatjuk meg, hogy az első n pozitív egész k-adik hatványának összegét n-nek egy $k+1$-ed fokú polinomja adja meg.

Indukcióval bizonyítunk; $k=1$-re ez ismert. Tegyük fel, hogy $k-1$-ig igaz az állítás. Írjuk fel a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned}(0+1)^{k+1} &= 1^{k+1},\\ (1+1)^{k+1} &= 2^{k+1},\\ \big((n-1)+1\big)^{k+1} &= n^{k+1},\\ (n+1)^{k+1} &= (n+1)^{k+1}.\end{aligned}$$

Mindegyik egyenlőség bal oldalát kifejthetjük a binomiális tétel szerint. Ha utána ezeket összeadjuk, a $k+1$-edik hatványok a rendezés során egy tag $\big((n+1)^{k+1}\big)$ kivételével kiesnek. Jelölje (minden t-re) a $\sum_{i=1}^{n} i^t$ összeget S_t, ekkor

$$\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+\dots+\binom{k+1}{k}S_1+\binom{k+1}{k+1}n=(n+1)^{k+1},$$

azaz

$$S_k=\frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1}-\left\{\binom{k+1}{2}S_{k-1}+\dots+\binom{k+1}{k}S_1+\binom{k+1}{k+1}n\right\}\right).$$

A jobb oldalon a kapcsos zárójelben szereplő összeg minden tagja az indukciós feltevés szerint előáll az n egy legfeljebb k-ad fokú polinomjaként. Ezzel (1)-et beláttuk.

(2) Legyen k pozitív egész. Belátjuk, hogy a $[0;1]$ intervallum felbontható véges sok racionális végpontú szakaszra, és e szakaszok tíz színnel kiszínezhetők úgy, hogy minden, legfeljebb k-ad fokú f polinomra, ha vesszük mindegyik $[a;b]$ szakasznál az $f(b)-f(a)$ különbségeket, és az azonos színű szakaszokhoz tartozókat összeadjuk, a kapott tíz összeg egyenlő.

Ha c tetszőleges nemnulla konstans, akkor az $f(cx)$ és $f(x+c)$ polinomok foka is annyi, mint az f polinomé; így elég az állításunkat $[0;1]$ helyett valamely alkalmas zárt intervallumra belátnunk; ezt a k szerinti indukcióval tesszük. Nyilvánvalóan $k=1$-re jó felbontás az, hogy a tizedelő pontok által meghatározott szakaszokat vesszük. Tegyük fel ezután, hogy (2) teljesül $k=t$-re. Tekintsük a $[0;1]$ intervallum egy ennek megfelelő felosztását és színezését; jelölje a színeket s_0, s_1, …, s_9. Másoljuk át a felosztást rendre az $[1;2]$, …, $[9;10]$ intervallumokra, viszont változtassuk meg ezeken a színezést úgy, hogy az $[i;i+1]$-en s_v helyébe s_{v+i} lépjen (minden $0\le i,v\le 9$-re; itt $v+i$ természetesen modulo 10 értendő). Ha ezután f egy $t+1$-ed fokú polinom (aminek a főegyütthatója c), akkor minden $0\le i\le 9$-re felírható $f=c(x-i)^{t+1}+g_i(x)$ alakban, ahol a g_i polinomok legfeljebb t-ed fokúak. Ekkor $f(x)=m(x)+r(x)$, ahol

$$m(x)=c(x-i)^{t+1},\quad \text{és}\quad r(x)=g_i(x),\quad \text{ha}\quad x\in[i;i+1].$$

A $[0;10]$ intervallumnak az így kapott felosztása és színezése mind az $m(x)$, mind pedig az $r(x)$ függvény számára megfelelő: $r(x)$-nek azért, mert az indukciós feltevés miatt mindegyik $[i;i+1]$ szakaszon is ugyanannyi az egyes színekhez tartozó különbségek összege. A konstrukció miatt pedig a $[0;10]$ szakaszon az $m(x)$ függvény szerinti különbségek összege bármelyik színben egyenlő a cx^{t+1} függvény $c\big(1^{t+1}-0^{t+1}\big)=c$ „megváltozásával” a $[0;1]$-en, mivel (az egységszakaszokon a színek ciklikus változtatása miatt) minden, a $[0;1]$ felosztásában szereplő szakasz tíz eltoltja tíz különböző színnel van kifestve (és $m(x)$ periodikus 1 szerint). Ezzel a (2) állítást beláttuk.

Vegyük a $[0;1]$ szakasznak (2) alapján egy jó felosztását és színezését $k=11$-re. Az osztópontok racionálisak – nagyítsuk fel az elrendezést úgy, hogy egészek legyenek. Tekintsük azt a 11-ed fokú f polinomot, amely (1) szerint az első n pozitív egész szám 10-edik hatványának összegképletét adja meg. Az f két egész helyen felvett értékének az eltérése egymást követő tizedik hatványok összege. Így bebizonyítottuk az állítást.