I. megoldás.

A háromszög három csúcsa legyen majd A, B és C,
A derékszög pedig forduljon az AB él felé.

A vizsgált szögfelező induljék teszem azt A-ból,
Ezzel semmit sem vonunk le az általánosságból.

Ez messe a BC oldalt a T-vel jelölt pontban,
C AT-re vetítettjének a P nevet adtam.

Ekkor P magasságtalppont CAT átfogóján,
Tehát AT belső pontja, ez evidens állítmány.

Mivel az APC-ben P szöge 90 fokos,
Thalész szerint a köréírt körközpont AC-n tapos.

Vegyünk hát fel párhuzamost AB-vel P-n keresztül,
Ez elmetszi AC oldalt O-ban, valahol belül.

Legyen CAB szög α, COP is ennyi lesz,
Feleennyit a CAP szög is – én mondom – kitesz.

Már csak egy sor van mi fontos, már csak ennyi kell ide:
A kerületi és középponti szögek tétele.

Hiszen így csakis O lehet CAP középpontja,
Minthogy egyrészt AC-n nyugszik, másrészt COP α.

Ennek pedig számunkra van egy szép következménye:
O AC felezőpontja, a középvonal vége.

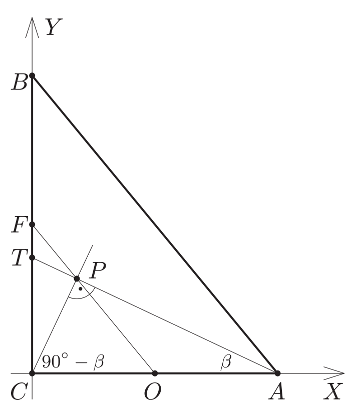
Így mivel párhuzamos az AB oldallal OP,
P a középvonalnak egy pontja, készen vagyunk, QED.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $\beta = TAC\sphericalangle = \alpha/2$. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy annak X tengelye a CA, az Y tengelye a CB egyenes legyen, az egységet pedig válasszuk úgy, hogy az A pont koordinátái $(2;0)$ legyenek. Ekkor $T = (0; 2\operatorname{tg}\beta)$,

$$B = (0; 2\operatorname{tg} 2\beta) = \left(0; \frac{4\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\right)$$

és a CB befogó F felezőpontjának koordinátái

$$\left(0, \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$



Mivel $PCO\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, azért a CP egyenes egyenlete

$$Y = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta)X = \operatorname{ctg}\beta X,$$

tehát $P = (p; p\operatorname{ctg}\beta)$ alakban írható. Az AT egyenes tengelymetszeti egyenlete

$$1 = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2\operatorname{tg}\beta},$$

erre illeszkedik a P pont, ezért

$$1 = \frac{p}{2} + \frac{p\operatorname{ctg}\beta}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$P = \left(\frac{2\operatorname{tg}^2 \beta}{1+\operatorname{tg}^2 \beta}; \frac{2\operatorname{tg} \beta}{1+\operatorname{tg}^2 \beta} \right).$$

Feladatunk állításának igazolásához már csak azt kell megmutatnunk, hogy P koordinátái kielégítik az OF egyenes egyenletét. Ezt az egyenletet ismét a tengelymetszeteket felhasználva írhatjuk fel. Mivel $O = (1; 0)$, az egyenlet

$$1 = \frac{X}{1} + \frac{Y}{\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Vagyis azt kell belátnunk, hogy

$$1 = \frac{2\operatorname{tg}^2 \beta}{1+\operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}}{\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Ez viszont azonnal adódik az emeletes tört egyszerűsítésével.