Megoldás. Először belátjuk az alábbi lemmát:

Ha $a, b, c \geq 0$ és $p \geq 1$ valós számok, akkor

$$(a+b+c)^p + a^p \geq (a+b)^p + (a+c)^p.$$

Ha $p = 1$, akkor a két oldal egyenlő. Ha $p > 1$, akkor vizsgáljuk az $f(x) = x^p$ függvényt. A függvény második deriváltja $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ $x > 0$ esetén biztosan pozitív, mert minden tényező nagyobb 0-nál, tehát a függvény konvex.

Így az $f(x) = x^p$ függvény grafikonján az $\big(a+b+c, f(a+b+c)\big)$ és az $\big(a, f(a)\big)$ pontokat összekötő szakasz (amennyiben létezik, vagyis ha b és c közül mindkettő pozitív) minden belső pontja a függvény görbéje fölött halad. Az is teljesül, hogy az $\big(a+b, f(a+b)\big)$ és az $\big(a+c, f(a+c)\big)$ pontokat összekötő szakasz minden belső pontja az előbbi szakasz alatt van, amiből

$$\frac{f(a+b+c)+f(a)}{2} > \frac{f(a+b)+f(a+c)}{2}.$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor lesz, ha $p = 1$, vagy $b = 0$, vagy $c = 0$. Ez pedig ekvivalens a lemma állításával.

Most térjünk rá az eredeti feladatra. Legyen

$$\begin{aligned} F(x) = {} & (x+y+z+v)^p + x^p + y^p + z^p + v^p - \\ & - (x+y)^p - (z+v)^p - (x+z)^p - (y+v)^p. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F'(x) &= p(x+y+z+v)^{p-1} + px^{p-1} - p(x+y)^{p-1} - p(x+z)^{p-1} \geq \\ &\geq p\big((x+y+z)^{p-1} + x^{p-1} - (x+y)^{p-1} - (x+z)^{p-1}\big). \end{aligned}$$

Mivel $p \geq 2$, így a lemma miatt $F'(x) \geq 0$, vagyis $F(x)$ monoton nő. Így $F(x)$ minimuma az $x = 0$ helyen van.

Vagyis az

$$(x+y+z+v)^p + x^p + y^p + z^p + v^p - (x+y)^p - (z+v)^p - (x+z)^p - (y+v)^p$$

kifejezés nem nő, ha x helyére 0-t írunk:

$$\begin{aligned} & (x+y+z+v)^p + x^p + y^p + z^p + v^p - (x+y)^p - \\ & - (z+v)^p - (x+z)^p - (y+v)^p \geq \\ \geq {} & (y+z+v)^p + y^p + z^p + v^p - y^p - (z+v)^p - z^p - (y+v)^p = \\ = {} & (y+z+v)^p + v^p - (z+v)^p - (y+v)^p, \end{aligned}$$

ez pedig legalább 0 a lemma miatt.

Egyenlőség akkor és csak akkor lesz, ha $p = 2$ és x vagy v közül legalább az egyik 0, illetve y és z közül is legalább az egyik 0; vagy $p > 2$ és $x = y = 0$ vagy $x = z = 0$ vagy $y = v = 0$ vagy $v = z = 0$.