Megoldás. Tudjuk, hogy n pozitív egész, 2^n+1 pedig prímszám. Ha létezne olyan p páratlan prímszám, amelyre $p \mid n$, akkor lenne olyan $x \in \mathbb{N}$, hogy $n = p \cdot x$.

Így $2^n+1 = 2^{p\cdot x}+1 = (2^x)^p + 1^p$. Az ismert azonosság alapján

$$2^x+1 \mid (2^x)^p + 1^p,$$

és $1 < 2^x+1 < 2^n+1$, tehát valódi osztó, így ekkor 2^n+1 nem lehetne prímszám. Ellentmondásra jutottunk, tehát n-nek nem lehet páratlan osztója, így $n = 2^k$ alakú szám.

Vizsgáljuk meg az ilyen alakú kitevők esetén a maradékokat 240-el osztva:

$$\begin{aligned}
2^{2^0}+1 &= 3 \equiv 3 \pmod{240},\\
2^{2^1}+1 &= 5 \equiv 5 \pmod{240},\\
2^{2^2}+1 &= 17 \equiv 17 \pmod{240},\\
2^{2^3}+1 &= 257 \equiv 17 \pmod{240},\\
2^{2^4}+1 &= 65\,537 \equiv 17 \pmod{240}.
\end{aligned}$$

Sejtés: ezután mindig 17 lesz a maradék.

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5.$$

Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy a $2^{2^k}+1$ alakú számok milyen maradékot adnak 2^4-nel, 3-mal és 5-tel osztva.

Legyen $A = 2^{2^k}+1$.

Ha $k \geq 2$, akkor $2^4 \mid 2^{2^k}$, így $2^4 \mid A-1 \Rightarrow 2^4 \mid A-1-16 \Rightarrow 2^4 \mid A-17$.

$$\begin{gathered}
A = 2^{2^k}+1 = (3-1)^{2^k}+1 \equiv (-1)^{2^k}+1 \equiv 2 \pmod{3} \implies\\
\implies 3 \mid A-2 \implies 3 \mid A-2-15 \implies 3 \mid A-17.
\end{gathered}$$

A 2-hatványok végződései pozitív kitevő esetén rendre 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6 stb. Tehát $A = 2^{2^k}+1$ végződése 7, így $A-17$ végződése 0, vagyis $5 \mid A-17$.

Így $k \geq 2$ esetén a 2^n+1 prímszámnak mindig 17 lesz a maradéka 240-nel osztva.

Tehát 3, 5 és 17 lehet a maradék.