I. megoldás. A bizonyításban felhasználjuk a vektorok összeadására vonatkozó paralelogramma szabályt, amely miatt $\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LR}$, illetve $\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LS}$.

Felhasználjuk még, hogy az $\overrightarrow{x}$ és $\overrightarrow{y}$ vektor felezőpontjába mutató $\overrightarrow{v}$ vektorra $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}}{2}$, amiből $\overrightarrow{y} = 2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{x}$.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az A pontot sorra tükrözve a P, Q, R, S és T pontokra, az utolsó tükörkép maga az A pont lesz.

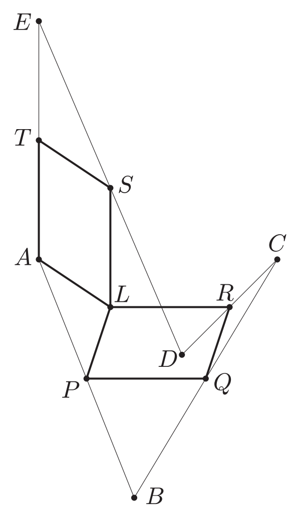
Jelölje tehát az A pont tükörképét a P pontra B. Ekkor $\overrightarrow{LB} = 2\overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LA}$.

A B pont tükörképe a Q pontra legyen C. Ekkor

$$\overrightarrow{LC} = 2\overrightarrow{LQ} - \overrightarrow{LB} = 2(\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LR}) - (2\overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LA}) = 2\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{LA}.$$

A C pont tükörképe az R pontra legyen D. Ekkor

$$\overrightarrow{LD} = 2\overrightarrow{LR} - \overrightarrow{LC} = 2\overrightarrow{LR} - (2\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{LA}) = -\overrightarrow{LA}.$$



A D pont tükörképe az S pontra legyen E. Ekkor

$$\overrightarrow{LE} = 2\overrightarrow{LS} - \overrightarrow{LD} = 2\overrightarrow{LS} + \overrightarrow{LA}.$$

Végül az E pont tükörképét a T pontra jelölje F. Ekkor

$$\overrightarrow{LF} = 2\overrightarrow{LT} - \overrightarrow{LE} = 2(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LS}) - (2\overrightarrow{LS} + \overrightarrow{LA}) = \overrightarrow{LA}.$$

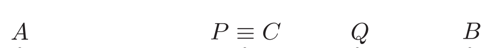
Vagyis $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{LA}$, és így valóban $F \equiv A$, tehát az így kapott $ABCDE$ ötszög megfelelő.

II. megoldás. Az A pont tükörképe a P pontra legyen a B pont, a B pont tükörképe a Q pontra pedig a C pont. Ha létrejön az ABC háromszög, akkor abban az AB oldal felezőpontja P, a BC oldalé pedig Q, így $PQ \parallel AC$ és $PQ = AC/2$. Mivel $PQRL$ paralelograma, vagyis szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért ebből $LR \parallel AC$ és $LR = AC/2$ következik.

Ha nem jön létre háromszög, akkor több eset lehetséges. Az $LSTA$ és a $PQRL$ paralelogrammáknak azonos a körüljárásuk és az L ponton kívül nincs közös részük, ezért az A, P és Q pontok csak APQ sorrendben követhetik egymást. Minden esetben a pontok egy egyenesre esnek, így $PQ \parallel AC$, tehát $LR \parallel AC$ is teljesülni fog. Belátjuk, hogy $LR = PQ = AC/2$ is mindig igaz. Legyen $AP = PB = a$ és $BQ = QC = b$.

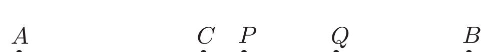
I. eset: $AP = PQ$. Ekkor $Q \equiv B \equiv C$, és így $AC = 2PQ$.

II.1. eset: $AP > PQ$ és $PQ = AP/2$.



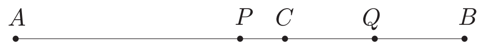
Ekkor $AC = AP = 2PQ$.

II.2. eset: $PQ < AP/2$.

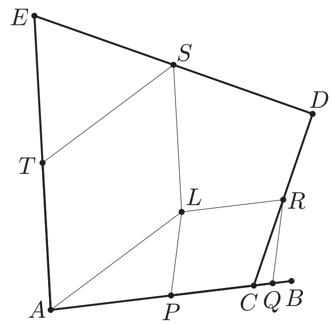


Ekkor $PQ = PB - QB = a - b$ és $AC = AB - CB = 2a - 2b$, tehát valóban $AC = 2PQ$.

II.3. eset: $AP > PQ > AP/2$.



Ekkor $PQ = PB - QB = a - b$ és $AC = AB - CB = 2a - 2b$, vagyis $AC = 2PQ$.

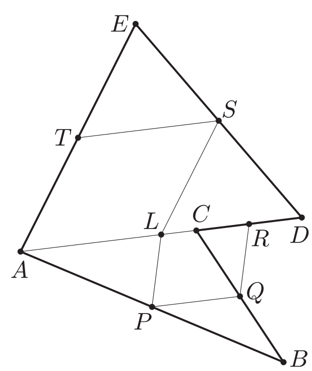


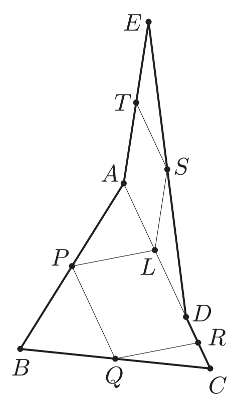
III. eset: $PQ > AP$.

Itt is teljesül, hogy $AC = 2PQ$.

Most induljunk el a másik irányba: tükrözzük az A pontot a T pontra, a tükörkép legyen E, majd az E pontot az S pontra, a tükörkép legyen D. Az ADE háromszögben TS középvonal, így párhuzamos AD-vel és feleakkora. Mivel $TS \parallel AL$ és $TS = AL$ is teljesül, ezért $AL \parallel AD$ és $AL = AD/2$, így L az AD felezőpontja.

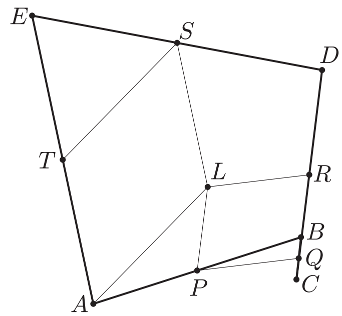
Tehát az A pont tükörképe L-re a D pont. Legyen a D pont tükörképe az R pontra a C' pont. Ha A, L, D és R nem esnek egy egyenesre, akkor az ADC' háromszögben LR középvonal, így párhuzamos AC'-vel és feleakkora. Mivel ugyanez igaz az AC-re is, ezért $C \equiv C'$. Ha a négy pont egy egyenesre esik, akkor a pontok sorrendje lehet $RALD$, $ARLD$, $ALRD$ vagy $ALDR$. Minden esetet meg lehet vizsgálni attól függetlenül, hogy valójában létrejöhetnek-e. Mindegyikben megkapjuk, hogy $LR \parallel AC'$ és feleakkora. Tehát ekkor is $C \equiv C'$. Két ilyen esetet mutat az alábbi két *ábra*.

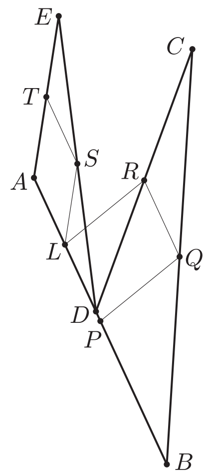




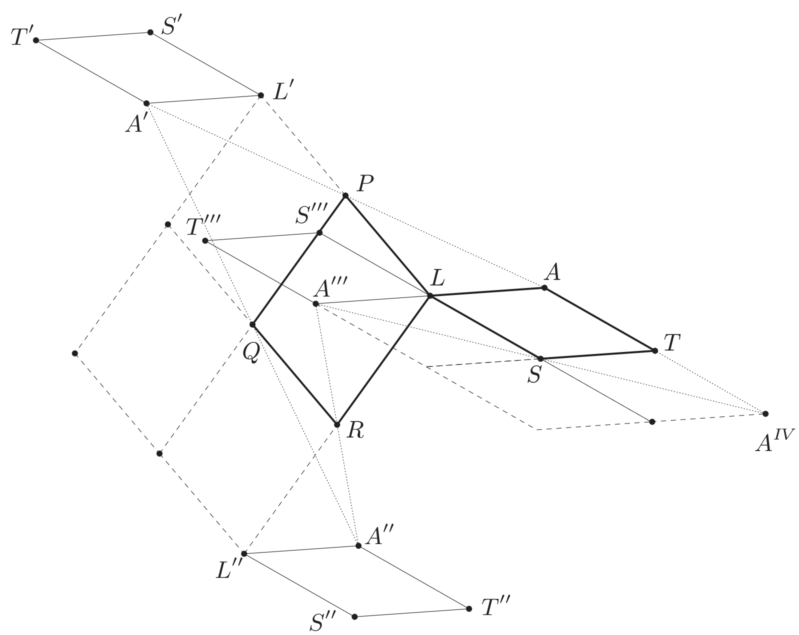
Az így kapott $ABCDE$ négyszög tehát megfelelő. A pontokat megkaphatjuk úgy is, hogy sorban tükrözünk a P, Q, R, S és T pontokra.

Megjegyzés. Nagyon sokan nem vizsgálták meg a megoldásukban felhasznált háromszögekre (pl. BCD, ABD vagy ACD) azt, amikor a csúcsaik egy egyenesre esnek. Lásd például az alábbi két elfajuló esetet.





III. megoldás. A feladat lényegében azt mondja, hogy ha az A csúcsot tükrözzük a P, Q, R, S, majd T pontra, akkor önmagát kapjuk vissza. Hogy jobban látszódjon a tükrözés, tükrözzük az egész $ALST$ paralelogrammát a pontokra. A paralelogrammán belül is nézzük az L pontot, hiszen az mindkét paralelogrammának csúcsa, így talán könnyebb dolgunk lesz.



Az első tükrözésnél az L tükörképe L', amiről tudjuk, hogy illeszkedik az LP félegyenesre és $PL = PL'$. Az $ALST$ képét jelölje $A'L'S'T'$. Ez az $ALST$-vel egyező állású (vagyis minden oldala párhuzamos annak megfelelő oldalaival), ám körüljárási iránya azzal ellentétes. Ha ezt a paralelogrammát tükrözzük a Q pontra, akkor az eredetivel egyező állású és körüljárású $A''L''S''T''$ paralelogrammát kapjuk, melyben L'' illeszkedik a $PQRL$ által meghatározott paralelogramma rácsra, azon belül az LR félegyenesre is és $LR = LR''$.

Ebből következik, hogy ha az $A''L''S''T''$ négyszöget az R pontra tükrözzük, akkor L'' képe az L pont lesz, valamint az így kapott $A'''LS'''T'''$ paralelogramma az $ALST$-vel egyező állású és ellentétes körüljárású lesz.

A továbbiakban vizsgáljuk csak az A''' pont és tükörképei helyzetét. Ehhez rajzoljuk meg az $ALST$ által meghatározott paralelogramma rácsot. Mivel $A'''LS'''T'''$ az $ALST$-vel egyező állású (és vele egybevágó), így maga is illeszkedik erre a rácsra.

Az A''' pontot az S pontra tükrözve az A^{IV} pontot kapjuk, amely illeszkedik az AT félegyenesre és $TA = TA^{IV}$. Így nyilván az A^{IV} tükörképe a T pontra az A pont, tehát az $AA'A''A'''A^{IV}$ egy megfelelő ötszög ($A' \equiv B$, $A'' \equiv C$, $A''' \equiv D$ és $A^{IV} \equiv E$).