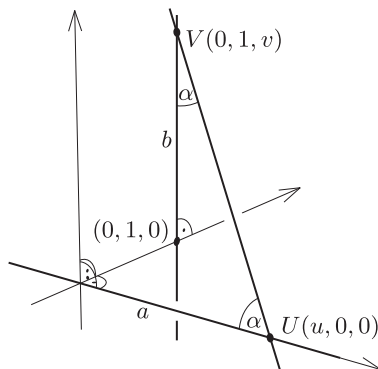


I. megoldás. Legyen a két kitérő egyenes a és b , a keresett harmadik egyenes c . Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az x tengely essen egybe a -val, a z tengely legyen párhuzamos b -vel, az y tengely egyenese pedig legyen a és b normáltranzverzálisa. Válasszuk meg az egységet úgy, hogy b átmenjen a $(0, 1, 0)$ ponton (1. ábra). Legyen $U = a \cap c$ és $V = b \cap c$. Ekkor U koordinátái $(u, 0, 0)$, V koordinátái pedig $(0, 1, v)$, ahol u és v valós számok. Az a , b és c egyenesek egy-egy irányvektora $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ és $\mathbf{c} = (-u, 1, v)$.



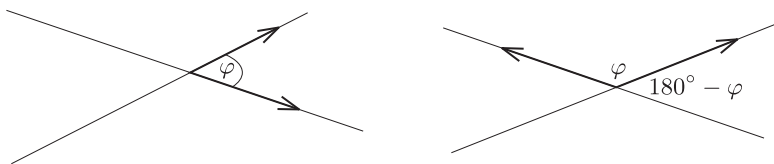
1. ábra

Két egyenes hajlásszöge vagy megegyezik az irányvektoraik hajlásszögével, vagy azt 180° -ra egészíti ki (2. ábra). Tetszőleges φ szög esetén $\cos^2 \varphi = \cos^2(180^\circ - \varphi)$, ezért c pontosan akkor tesz eleget a feladat feltételeinek, ha

$$\cos^2 \alpha = \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) < \cos^2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) <$$

teljesül. A vektorok szögének koszinuszát viszont a skaláris szorzatukból könnyen kiszámolhatjuk, hiszen tetszőleges $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ és $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ vektorok esetén

$$\cos(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < = \frac{\mathbf{s} \mathbf{t}}{|\mathbf{s}| |\mathbf{t}|} = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}.$$



2. ábra

Így azt kapjuk, hogy c pontosan akkor jó egyenes, ha

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{\mathbf{a} \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{c}|} \right)^2 = \left(\frac{\mathbf{b} \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|} \right)^2,$$

azaz felhasználva, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, ha $(-u)^2 = v^2$, vagyis ha $u = \pm v$. Ekkor

$$(1) \quad \cos^2 \alpha = \frac{u^2}{2u^2 + 1} < \frac{1}{2},$$

vagyis $\cos \alpha < 1/\sqrt{2}$, ezért $\alpha > 45^\circ$.

Tehát ha $\alpha \leq 45^\circ$, akkor nincs a feltételeknek eleget tevő c egyenes. Ha viszont $\alpha > 45^\circ$, akkor négy megfelelő egyenes van. Ekkor ugyanis az (1) egyenletből u^2 -et kifejezve kapjuk, hogy

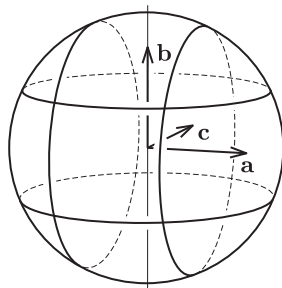
$$u^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} > 0,$$

ha tehát

$$w = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha}},$$

akkor a $(\pm w, 0, 0)$ pontok bármelyikét a $(0, 1, \pm w)$ pontok bármelyikével összekötő egyenes α szöget fog bezárni a -val is és b -vel is.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. A feltétel szerint \mathbf{a} és \mathbf{c} által bezárt szög, illetve \mathbf{b} és \mathbf{c} által bezárt szög is α vagy $\pi - \alpha$. Ábrázoljuk a vektorokat az egységgömbön, azaz egy rögzített egységgömb középpontjából mérjük fel őket és tekintsük a végpontjaikat. Azok a vektorok, amiknek az \mathbf{a} vektorral bezárt szöge α vagy $\pi - \alpha$, egy \mathbf{a} és egy $-\mathbf{a}$ középpontú, α sugarú körön helyezkednek el. Hasonlóan, azok a vektorok, amiknek a \mathbf{b} vektorral bezárt szöge α vagy $\pi - \alpha$, egy \mathbf{b} és egy $-\mathbf{b}$ középpontú, α sugarú körön vannak. A \mathbf{c} vektor e két halmaz metszetében van (3. ábra).



3. ábra

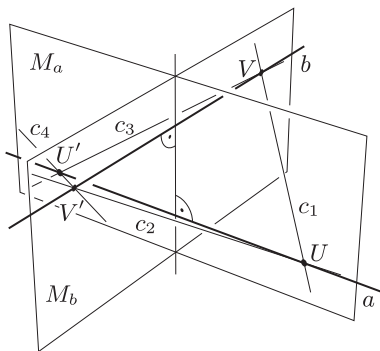
A gömbön \mathbf{a} és \mathbf{b} távolsága $\pi/2$, mert az a és b egyenesek merőlegesek egymásra. Ha tehát $\alpha < \pi/4$, akkor a két halmaznak nincs közös pontja, ezért nem létezik a feltételeknek megfelelő c egyenes.

Ha $\alpha = \pi/4$, akkor a két halmaznak 4 közös pontja van, továbbá az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok egy síkba esnek. Ez azt jelenti, hogy ekkor az a, b és c egyeneseknek is egy síkba kellene esniük, ami ellentmond annak, hogy a és b kitérők. Tehát ekkor sincs a feltételeknek eleget tevő egyenes.

Végül, ha $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, akkor a két halmaznak 8 közös pontja van, az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok pedig lineárisan függetlenek. Ilyenkor az a és b egyenesek és a c vektor egyértelműen meghatározzák a c egyenes helyzetét: az a egyenes és a c vektor egyértelműen meghatározza az a és c egyeneseket tartalmazó S_a síkot, a b egyenes és a c vektor pedig egyértelműen meghatározza a b és c egyeneseket tartalmazó S_b síkot. Az S_a és S_b síkok különbözőek, mert a és b kitérők, c pedig e két sík metszészvonala. Mivel az ellentétes irányú c irányvektorok ugyanazt a c egyenest határozzák meg, ezért ebben az esetben összesen 4, a feltételeknek megfelelő egyenes létezik.

Összefoglalva tehát $\alpha \leq \pi/4$ esetén 0, $\alpha > \pi/4$ esetén pedig 4 a két egymásra merőleges kitérő egyenest metsző, mindkettővel α szöget bezáró egyeneseknek a száma.

Megjegyzés. Az, hogy a megfelelő egyenesek száma négyvel osztható, egyszerűen belátható. Ha a és b normáltranzverzálisa az n egyenes, az a és n egyeneseket tartalmazó sík M_a , a b és c egyeneseket tartalmazó sík M_b , c pedig egy a feltételeknek eleget tevő egyenes, akkor c -nek M_a -ra, illetve M_b -re vonatkozó tükörképei is jó egyenesek, mert az a és b egyenesek képei önmaguk és a tükrözés szögtartó. Ezért ha az U pont M_a -ra vonatkozó tükörképe U' , a V pont M_b -re vonatkozó tükörképe pedig V' (4. ábra), akkor az $UV, UV', U'V$ és $U'V'$ egyenesek közül bármelyik pontosan akkor tesz eleget a feladat feltételeinek, amikor a három másik.



4. ábra