I. megoldás. Jelölje p_n a feladatban kérdezett valószínűséget. Az $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ események közül vagy akkor következik be páratlan sok, ha az $A_2, A_3, \dots, A_n$ események közül páros sok és azonkívül A_{n+1} is bekövetkezik, vagy ha az előbbiek közül páratlan sok következik be, A_{n+1} pedig nem. Mivel az A_i események függetlenek, felírható a következő rekurzív egyenlet:

$$p_{n+1} = P(A_{n+1})(1-p_n) + \big(1-P(A_{n+1})\big)p_n.$$

A feladat feltétele szerint $P(A_2) = \dfrac{1}{8}$ és $P(A_3) = \dfrac{1}{18}$. Nyilván $p_2 = \dfrac{1}{8}$ és így

$$p_3 = \frac{1}{18}\cdot\frac{7}{8} + \frac{17}{18}\cdot\frac{1}{8} = \frac{2}{12}.$$

Megsejthető az általános képlet: $p_n = \dfrac{n-1}{4n}$.

A képlet helyességét teljes indukcióval bizonyítjuk. A képlet $n=2$ és $n=3$ esetén helyes. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra is igaz. Írjuk fel $n=k+1$-re:

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= P(A_{k+1})(1-p_k) + \big(1-P(A_{k+1})\big)p_k = \\
&= \frac{1}{2(k+1)^2}\cdot\frac{3k+1}{4k} + \frac{2(k+1)^2-1}{2(k+1)^2}\cdot\frac{k-1}{4k} = \\
&= \frac{(3k+1)+(k-1)\big(2k^2+4k+1\big)}{8k(k+1)^2} = \\
&= \frac{2k^3+2k^2}{8k(k+1)^2} = \frac{2k^2(k+1)}{8k(k+1)^2} = \frac{k}{4(k+1)}.
\end{aligned}$$

Tehát a képlet fennáll $n=k+1$-re is, az indukciót befejeztük.

Annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be, $\dfrac{n-1}{4n}$.

II. megoldás. Legyen p annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be. Definiáljuk az $X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változókat a következőképpen: legyen $X_i = -1$, ha A_i bekövetkezik, illetve $X_i = +1$, ha A_i nem következik be.

Az $X_2X_3\dots X_n$ szorzat értéke pontosan akkor -1, ha $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be, ellenkező esetben a szorzat $+1$. A szorzat várható értéke ezért

$$E(X_2X_3\dots X_n) = p\cdot(-1) + (1-p)\cdot(+1) = 1-2p. \tag{1}$$

Független változók szorzatának várható értékét tényezőnként is kiszámíthatjuk, ezért

$$\begin{aligned}
E(X_2X_3\dots X_n) &= \prod_{i=2}^{n} E(X_i) = \prod_{i=2}^{n}\Big(P(A_i)\cdot(-1) + \big(1-P(A_i)\big)\cdot(+1)\Big) = \\
&= \prod_{i=2}^{n}\big(1-2P(A_i)\big) = \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n}\frac{(i-1)(i+1)}{i^2} = \\
&= \frac{(1\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 5)\dots\big((n-3)(n-1)\big)\big((n-2)\cdot n\big)\big((n-1)(n+1)\big)}{2^2\cdot 3^2\dots n^2} = \\
&= \frac{2n(n+1)}{2^2\cdot n^2} = \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned} \tag{2}$$

(Kisebb n esetén a középső tényezők „összeérnek”.) Az (1) és (2) összevetéséből $1-2p = \dfrac{n+1}{2n}$, amiből

$$p = \frac{n-1}{4n}.$$