Megoldás. Ha $x = 0$, akkor az első egyenletből $y = 0$. Hasonlóan, ha $y = 0$, akkor a második egyenletből $x = 0$. Tehát az $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ számpár megoldása az egyenletrendszernek és a továbbiakban feltehetjük, hogy $x \neq 0$, $y \neq 0$. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet.

$$x^3 - y^3 = 5x + y - 5y - x,$$
$$(x - y)\big(x^2 + xy + y^2\big) = 4(x - y).$$

Most két esetet kell vizsgálnunk.

Ha $x = y$, akkor az eredeti első egyenletbe helyettesítve

$$x^3 = 5x + x, \qquad x^3 - 6x = 0.$$

Mivel már feltehetjük, hogy $x \neq 0$, ezért $x^2 = 6$. Ebből kapjuk az $x_2 = y_2 = \sqrt{6}$ és $x_3 = y_3 = -\sqrt{6}$ megoldásokat.

Ha $x \neq y$, akkor $x^2 + xy + y^2 = 4$. Mielőtt ennek részletes vizsgálatához kezdenénk, adjuk össze az eredeti két egyenletet.

$$x^3 + y^3 = 6x + 6y,$$
$$(x + y)\big(x^2 - xy + y^2\big) = 6(x + y).$$

Ha most $x = -y$, akkor a második egyenletbe helyettesítve

$$y^3 = 4y, \qquad y^2 = 4,$$

hiszen az $y = 0$ esetet már korábban lezártuk. Innen adódnak az $x_4 = 2$, $y_4 = -2$ és $x_5 = -2$, $y_5 = 2$ megoldások. A továbbiakban feltehetjük, hogy $x + y \neq 0$, így az egyenlet egyszerűsíthető $(x + y)$-nal. Az egyenletek kivonásával és összeadásával kaptunk négy megoldást és látjuk, hogy a továbbiakban a következő egyenletrendszert kell már csak megoldanunk:

$$x^2 + xy + y^2 = 4, \qquad x^2 - xy + y^2 = 6.$$

A két egyenlet kivonásával kapjuk, hogy $xy = -1$. Ezt az első egyenlethez adva, majd a másodikból kivonva:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3, \qquad x^2 - 2xy + y^2 = 7.$$

E két teljes négyzetből látjuk, hogy $x + y = \sqrt{3}$, $x + y = -\sqrt{3}$, $x - y = \sqrt{7}$, $x - y = -\sqrt{7}$. Ezek párosításaiból négy további elsőfokú egyenletrendszer adódik.

$$x + y = \sqrt{3}, \qquad x - y = \sqrt{7} \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \qquad y_6 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2},$$
$$x + y = \sqrt{3}, \qquad x - y = -\sqrt{7} \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \qquad y_7 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2},$$
$$x + y = -\sqrt{3}, \qquad x - y = \sqrt{7} \qquad \Rightarrow \qquad x_8 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \qquad y_8 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2},$$
$$x + y = -\sqrt{3}, \qquad x - y = -\sqrt{7} \qquad \Rightarrow \qquad x_9 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \qquad y_9 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}.$$

Ellenőrzés alapján látható, hogy mind a kilenc számpár valóban megoldása az egyenletrendszernek.