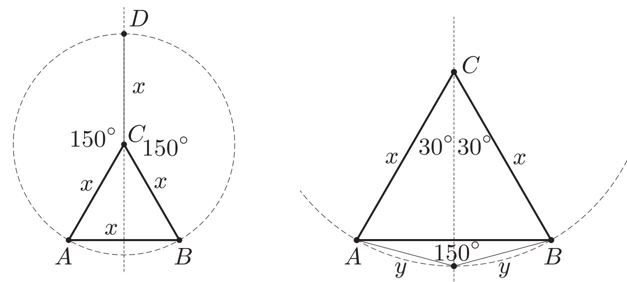
Megoldás. A pontok közötti kétféle távolságot x-szel és y-nal fogjuk jelölni, hiszen nem lesz azonnal világos, hogy melyik hosszúság a nagyobb.

Először tekintsük azokat az elrendezéseket, amelyekben a négy pont között van három olyan, amely egy ABC szabályos háromszöget határoz meg, mondjuk x oldalhosszúságút. A negyedik D pontnak az első háromtól vett távolságai között lesz két egyenlő, ami például $AD = BD$ az általánosság megszorítása nélkül. Ez azt jelenti, hogy D rajta van AB oldalfelező merőlegesén, ami a C csúcson is áthalad.

Ha itt $CD = x$, akkor D kétféle lehet, az *1. ábra* szerint. A bal oldalon szereplő elrendezésben szimmetria miatt

$$DCA\sphericalangle = DCB\sphericalangle = \frac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ.$$



1. ábra

Mivel $AC = CD$, azért x és y egy 150°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. A jobb oldali ábrán pedig $DCA\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 30^\circ$ és $CA = CD = CB$, így

$$CDA\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

és emiatt $ADB\sphericalangle = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$. Ezzel x és y ismét egy 150°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. Tehát mindkét esetben ugyanahhoz az a/b arányhoz jutunk. Ennek kiszámításához alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 150^\circ.$$

Itt $\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és így $\dfrac{a^2}{b^2} = 2 + \sqrt{3}$, $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

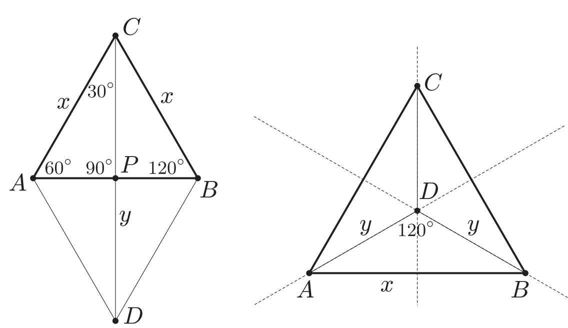
Ha $DA = DB = x$, akkor vagy $C = D$ (amit kizárhatunk), vagy pedig D a C pont tükörképe AB-re (*2. ábra*). Utóbbi esetben x és y egy $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$-os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai. Legyen $P = CD \cap AB$, ekkor Pitagorasz-tétellel

$$PC^2 = AC^2 - AP^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

(az ábra CD-re szimmetrikus), azaz

$$y = CD = 2 \cdot PC = 2 \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \sqrt{3} \cdot x.$$

A kapott arány tehát $\dfrac{a}{b} = \sqrt{3}$.



2. ábra

Ha pedig sem DC, sem $DA = DB$ nem lesz x hosszúságú, akkor $y = DA = DB = DC$, így D az ABC kör középpontja (*2. ábra*). Ekkor

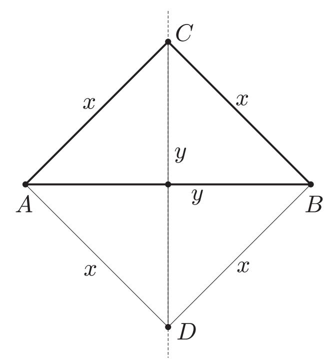
$$ADB\sphericalangle = BDC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ,$$

tehát x és y az előző esethez hasonlóan egy 120°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai, a kapott arány tehát az előző esetbeli $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

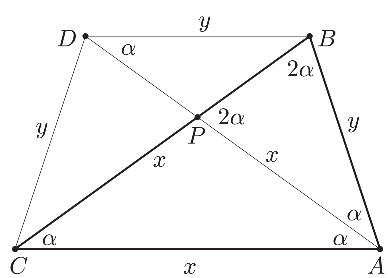
Mivel másféle elrendezésben nem szerepelhet szabályos háromszög, így a további esetekben feltételezzük, hogy szabályos háromszög nem jön létre.

Induljunk ki egy ABC egyenlő szárú háromszögből. Mivel a negyedik, D pont távolsága A-tól, B-től és C-től kétféle, így D rajta lesz az ABC háromszög egyik oldalfelező merőlegesén (*3. ábra*). Két esetünkben D rendre az $AB = y$ alap, illetve a $BC = x$ szár felezőmerőlegesén lesz.

Amennyiben $DA = DB$, akkor $DA = DB \neq AB = y$, mert akkor volna szabályos háromszög, vagyis $DA = DB = AC = BC = x$. Tekintve, hogy az ACD háromszög sem szabályos, $CD = y$. Tehát $ADBC$ egy egyenlő átlójú rombusz, vagyis szükségképpen négyzet. A Pitagorasz-tételt az ABC háromszögre alkalmazva $y^2 = x^2 + x^2$, ahonnan $\frac{a}{b} = \frac{y}{x} = \sqrt{2}$.



3. ábra



4. ábra

A legbonyolultabb eset, amikor $DB = DC$ (*4. ábra*). Mivel a DBC háromszög nem szabályos és $BC = x$, így $DB = DC = y$. A DAB háromszög sem szabályos, ezért $DA = x$. Vegyük észre, hogy az ABD és BDC háromszög oldalegyenlőség miatt egybevágó, amiből $ABD\sphericalangle = BDC\sphericalangle$. Ezt $AB = BD = DC$-vel összevetve az adódik, hogy $ABDC$ szimmetrikus trapéz. Legyen $AD \cap BC = P$ és $\alpha = BAD\sphericalangle$. Váltószögek és egyenlő szárú háromszögek miatt

$$\alpha = BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle = DAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$$

és $BAC\sphericalangle = 2\alpha = ABC\sphericalangle$, sőt

$$APB\sphericalangle = 180° - APC\sphericalangle = 2\alpha.$$

Ebből adódik, hogy $AB = AP = PC = y$. Az is kiderült, hogy az ABP és CAB háromszögek hasonlók, amiből $\frac{AB}{PB} = \frac{CA}{AB}$. Behelyettesítve a megfelelő értékeket $\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}$, szorzással $(x > y)$ $y^2 = x^2 - xy$, majd osztva $\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1 = 0$.

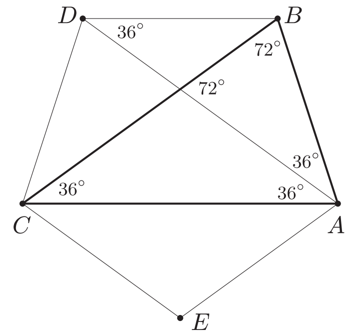
A kapott másodfokú egyenlet pozitív gyöke kell nekünk:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

lesz a megoldás.

Tehát a lehetséges a/b hányadosok: $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Mindegyik eset ténylegesen létezik, és előállítja a megadott arányokat. Az utolsó esetben ez például abból látható, hogy az elrendezés a szabályos ötszög egy részeként áll elő (ld. *5. ábra*).



5. ábra