I. megoldás. Egy szám akkor tökéletes szám, ha egyenlő valódi osztóinak az összegével. A $2 \cdot 3^k$ valódi osztói az $1, 3, \ldots, 3^k, 2, 2 \cdot 3, \ldots, 2 \cdot 3^{k-1}$. Ha tökéletes számról van szó, akkor felírható a következő egyenlet:

$$1 + 3 + \ldots + 3^k + 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^k.$$

Mindkét oldalhoz $2 \cdot 3^k$-t hozzáadva, majd felhasználva a mértani sorozat összegképletét:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + 3^k + 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 3^k &= 4 \cdot 3^k, \\ 3\big(1 + 3 + \ldots + 3^k\big) &= 4 \cdot 3^k, \\ 3 \cdot \frac{\big(3^{k+1} - 1\big)}{2} &= 4 \cdot 3^k, \\ 3^{k+2} - 3 &= 8 \cdot 3^k, \\ (9-8)3^k &= 3, \\ 3^k &= 3. \end{aligned}$$

Az összes átalakítás ekvivalens volt.

A 3^x függvény szigorúan monoton növekvő, ezért az egyetlen megoldás a $k = 1$.

II. megoldás. $k = 1$ esetén $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám, hiszen $2 \cdot 3^1 = 6 = 1 + 2 + 3$.

$k \geq 2$ esetén a 3^{k-2}, 3^{k-1}, 3^k és $2 \cdot 3^{k-1}$ mind egymástól és a $2 \cdot 3^k$-tól is különböző pozitív egész számok és mind a $2 \cdot 3^k$ osztói (mert a prímtényezős felbontásuk különböző és egyik prímtényezőjük kitevője sem nagyobb a $2 \cdot 3^k$ megfelelő prímtényezőjének kitevőjénél).

Tehát a $2 \cdot 3^k$ osztóinak összege legalább

$$3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k + 3^{k-2} = 3 \cdot 3^{k-1} + 3^k + 3^{k-2} = 2 \cdot 3^k + 3^{k-2}.$$

Ez biztosan nagyobb $2 \cdot 3^k$-nál.

Vagyis $2 \cdot 3^k$ csak $k = 1$ esetén tökéletes szám.

III. megoldás. A $2 \cdot 3^k$ szám biztosan páros, mivel osztható kettővel, de a 2-nek magasabb kitevőjű hatványával nem. Ismert tétel (Karlik Zsuzsanna: *A tökéletes számok* című munkájában megtalálható a bizonyítással együtt), hogy egy páros n szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ alakú, és $(2^p - 1)$ és p egyaránt prímszámok.

Jelen esetben $2 \cdot 3^k = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ kell, hogy teljesüljön valamilyen p prímszámra. Mivel $2^p - 1$ páratlan, azért $2 = 2^{p-1}$, amiből $p = 2$ következik a 2^x függvény szigorú monotonitása miatt. Ebből $2 \cdot 3^k = 2^{2-1} \cdot \big(2^2 - 1\big) = 2 \cdot 3$, vagyis $k = 1$ az egyetlen megoldás.

Megjegyzés. Voltak, akik Euler egy tételét használták, és a megoldást $2^n(2^{n+1} - 1)$ alakban keresték. Ez utóbbi gondolatmenetre jellemző típushiba volt, hogy a megoldók nem vették figyelembe, hogy a páratlan tökéletes számok létezése nyitott kérdés, és Euler ezen tételét általánosan használták.

IV. megoldás. Ha $k = 1$, akkor a szám tökéletes: $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$.

Nézzük meg, mi történik, ha k-ról $(k+1)$-re ugrunk: mennyivel fog változni az osztók összege és maga a szám.

$2 \cdot 3^k$ valódi osztói: $2 \cdot 3^0$, $2 \cdot 3^1, \ldots, 2 \cdot 3^{k-1}$; 1, 3^1, $3^2, \ldots, 3^k$.

$2 \cdot 3^{k+1}$ valódi osztói: $2 \cdot 3^0$, $2 \cdot 3^1, \cdots$, $2 \cdot 3^k$; 1, 3^1, $3^2, \cdots$, 3^k, 3^{k+1}.

Tehát a különbségek így alakulnak: $2 \cdot 3^{k+1} - 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 3^k = 4 \cdot 3^k$ a két szám közötti különbség és $2 \cdot 3^k + 3^{k+1} = 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 3^k$ az osztók összege közötti különbség. Ez azt jelenti, hogy $k > 1$ esetén a valódi osztók összege nagyobb lesz, mint a szám.