I. megoldás. Mivel az állításban szereplő egyenlőség jobb oldala zárt, próbáljuk a bal oldalt szintén zárt alakra hozni. Ehhez emeljünk ki az összegből 2-t, majd használjuk fel a szumma felbonthatóságát, és ismét emeljünk ki, ezúttal n-et. Ezután, mivel $i=n$-re $n-i=0$ – vagyis a második szumma utolsó tagja 0 – azt a tagot hagyjuk el:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i\binom{2n}{n-i} = 2\left(\sum_{i=1}^{n}(n-(n-i))\binom{2n}{n-i}\right) =$$
$$= 2\left(n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\binom{2n}{n-i}\right) := A.$$

Az első szumma a Pascal-háromszög $2n$-edik sorában adja össze a tagokat a 0-t tartalmazótól az $(n-1)$-et tartalmazóig. Ennek a sornak $2n+1$ eleme van és szimmetrikus a középső elemére $\left(\text{hiszen } \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}\right)$, ami $\binom{2n}{n}$. Tudjuk még, hogy a Pascal-háromszög m-edik sorának a tagösszege 2^m, ezért a fenti összeg így írható:

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n-i} = \frac{\sum_{i=1}^{2n}\binom{2n}{i} - \binom{2n}{n}}{2} = \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2}.$$

Tehát

$$A = 2\left(n\cdot\frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2} - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\binom{2n}{n-i}\right) =$$
$$= 2\left(n\cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2}\binom{2n}{n} - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\binom{2n}{n-i}\right) := B.$$

Fordítsuk most figyelmünket a megmaradt szummában lévő kifejezésre. Ha olyan alakra tudnánk hozni, amiben szintén csak egy sor elemeit kell összegeznünk, akkor zárt alakú lenne. Alakítsuk hát át a következő, a Pascal-háromszög tagjainak explicit felírásából következő egyenlőség segítségével:

$$(n-i)\binom{2n}{n-i} = (n-i)\cdot\frac{(2n)!}{(n-i)!(n+i)!} = 2n\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-i-1)!(n+i)!} =$$
$$= 2n\binom{2n-1}{n-i-1}.$$

Tehát

$$B = 2\left(n\cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2}\binom{2n}{n} - 2n\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n-1}{n-i-1}\right).$$

A szummában szereplő összeg a Pascal-háromszög $(2n-1)$-edik sorának a tagösszege a nullát tartalmazótól az $(n-2)$-t tartalmazóig. Ebben a $2n$ elemű sorban az első n elem összege ugyanannyi, mint a második n elemé. Így a következő átalakításokat végezhetjük:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n-1}{n-i-1} = \frac{\sum_{i=1}^{2n-1}\binom{2n-1}{i}}{2} - \binom{2n-1}{n-1} = \frac{2^{2n-1}}{2} - \binom{2n-1}{n-1}.$$

A bal oldal tehát, a végén felhasználva a tagok szimmetriáját, majd a Pascal-háromszög rekurzív definícióját:

$$2\left(n\cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2}\binom{2n}{n} - 2n\left(\frac{2^{2n-1}}{2} - \binom{2n-1}{n-1}\right)\right) =$$
$$= 2\left(n\cdot 2^{2n-1} - \frac{n}{2}\binom{2n}{n} - n\cdot 2^{2n-1} + 2n\binom{2n-1}{n-1}\right) =$$
$$= n\cdot\left(4\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n}{n}\right) =$$
$$= n\cdot\left(2\binom{2n-1}{n-1} + 2\binom{2n-1}{n} - \binom{2n}{n}\right) = n\left(2\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n}\right) = n\binom{2n}{n}.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n=1$, akkor $2\cdot\binom{2}{0}=2$ és $1\cdot\binom{2}{2}=1$, tehát igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, és bizonyítsuk be $n+1$-re. Felhasználjuk, hogy $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}2i\binom{2n+2}{n+1-i}&=\sum_{i=0}^{n+1}2i\left(\binom{2n+1}{n+1-i}+\binom{2n+1}{n-i}\right)=\\&=\sum_{i=0}^{n+1}2i\left(\binom{2n}{n+1-i}+\binom{2n}{n-i}+\binom{2n}{n-i}+\binom{2n}{n-i-1}\right)=\\&=\sum_{i=0}^{n+1}\left(2i\binom{2n}{n+1-i}+4i\binom{2n}{n-i}+2i\binom{2n}{n-i-1}\right).\end{aligned}$$

Az első szummába $j=i-1$-et, a másodikba $j=i$-t, a harmadikba $j=i+1$-et helyettesítve és a 0-s szorzókat tartalmazó tagokat elhagyva az összeg így is írható:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n}(2j+2)\binom{2n}{n-j}+\sum_{j=1}^{n+1}4j\binom{2n}{n-j}+\sum_{j=2}^{n+2}(2j-2)\binom{2n}{n-j}=\\&=\sum_{j=2}^{n}[(2j+2)+4j+(2j-2)]\binom{2n}{n-j}+2\binom{2n}{n}+4\binom{2n}{n-1}+4\binom{2n}{n-1}=\\&=\sum_{j=2}^{n}8j\binom{2n}{n-j}+8\binom{2n}{n-1}+2\binom{2n}{n}=4\sum_{j=1}^{n}\left(2j\binom{2n}{n-j}\right)+2\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevést felhasználva ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned}&=4n\binom{2n}{n}+2\binom{2n}{n}=(4n+2)\binom{2n}{n}=(n+1)\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\binom{2n}{n}=\\&=(n+1)\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=(n+1)\binom{2n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor

$$\sum_{i=n-k+1}^{n}2i\cdot\binom{2n}{n-i}=k\cdot\binom{2n}{k}.$$

Ezt az általánosabb összefüggést látjuk be k-ra vonatkozó teljes indukcióval.

$k=1$ esetén az állítás:

$$2n\cdot\binom{2n}{0}=1\cdot\binom{2n}{1}.$$

Mivel mindkét oldal $2n$-nel egyenlő, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $k=m$ esetén:

$$\sum_{i=n-m+1}^{n}2i\cdot\binom{2n}{n-i}=m\cdot\binom{2n}{m}.$$

Bizonyítsuk be $k=m+1$-re. Ekkor az állítás:

$$\sum_{i=n-m}^{n}2i\cdot\binom{2n}{n-i}=(m+1)\cdot\binom{2n}{m+1}.$$

A bal oldali összeg első tagját kiszedve a szummából:

$$2(n-m)\cdot\binom{2n}{m}+\sum_{i=n-m+1}^{n}2i\cdot\binom{2n}{n-i}=(m+1)\cdot\binom{2n}{m+1}.$$

Az indukciós feltételt felhasználva:

$$\begin{aligned}2(n-m)\cdot\binom{2n}{m}&=(m+1)\cdot\binom{2n}{m+1}-m\cdot\binom{2n}{m},\\(2n-m)\cdot\binom{2n}{m}&=(m+1)\cdot\binom{2n}{m+1}.\end{aligned}$$

Bontsuk ki a binominális együtthatókat:

$$(2n-m)\cdot\frac{(2n)!}{m!(2n-m)!}=\frac{(2n)!}{m!(2n-m-1)!},$$

illetve

$$(m+1)\cdot\frac{(2n)!}{(m+1)!(2n-m-1)!}=\frac{(2n)!}{m!(2n-m-1)!}.$$

Ezzel a tételt teljes indukcióval bizonyítottuk. Ennek egy speciális esete volt a feladatban kitűzve, ahol $k=n$, amire az állítás az általános tételből triviálisan következik.

IV. megoldás. A megoldás során bizonyítandó egyenlőség bal oldalát jelölje

$$B=\sum_{i=1}^{n}2i\cdot\binom{2n}{n-i},$$

a jobb oldalát pedig

$$J=n\cdot\binom{2n}{n}.$$

Tekintsünk egy véletlen bolyongást az egész számokon: Egy bolha az origóból indul és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra, ugyanilyen valószínűséggel balra ugrik 1-et, majd az előző lépéstől függetlenül, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra, ugyanilyen valószínűséggel balra ugrik 1-et, és így tovább.

Értelmezzük az X_{2n} valószínűségi változót a következőképpen: $X_{2n}:=$ a bolyongás $2n$-edik lépésében a bolha helye. Ekkor X_{2n} lehetséges értékei a $[-2n,2n]$ intervallum páros értékű helyei. Ha a jobbra lépések száma j, akkor a balra lépéseké $2n-j$. Ha a bolha a $2i$-re lépett $2n$ lépés után, akkor $j-(2n-j)=2i$, amiből $j=n+i$. Innen

$$P(X_{2n}=2i)=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n+i}=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n-i},$$

ahol $i\in[-n,n]$, egész.

Legyen

$$S_{2n}=E(|X_{2n}|)=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\sum_{i=-n}^{n}2\cdot|i|\cdot\binom{2n}{n-i}.$$

$S_{2n}=2\cdot\frac{1}{2^{2n}}\cdot B$, hiszen $i=0$ esetén az összegben 0 szerepel. Ha belátjuk, hogy $S_{2n}=2\cdot\frac{1}{2^{2n}}\cdot J$, akkor abból valóban $J=B$ következik.

Lemma:

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n}\quad\text{és}\quad S_{2n+2}=S_{2n+1}.$$

A lemma bizonyítása: A második egyenlőség triviális, mert a $(2n+1)$-edik lépés után a bolha egy páratlan, tehát 0-tól különböző helyen van, tehát $|X_{2n+2}|-|X_{2n+1}|$ értéke mindentől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel -1, és ugyanilyen valószínűséggel $+1$. Az első egyenlőséghez egyrészt azt kell megjegyezni, hogy a várható érték számításánál az $X_{2n}=0$-hoz tartozó összeadandó az i-vel való szorzás miatt 0, viszont ha a bolha a $2n$-edik lépésben a origóban volt, akkor a $(2n+1)$-edik lépésben pontosan 1 lesz $|X_{2n+1}|$ értéke. Ez az esemény

$$P(X_{2n}=0)=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n}$$

valószínűséggel következik be.

Állítás:

$$S_{2n}=2\cdot\frac{1}{2^{2n}}\cdot n\cdot\binom{2n}{n}.$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval: $n=1$ re igaz. Feltéve az n-re vonatkozó állítást, $n+1$-re fogjuk igazolni.

A lemma miatt:

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} = S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} &= 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot n \cdot \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} = \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot (2n+1) \cdot \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)n!n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot (n+1) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{n+1}{2} \binom{2n+2}{n+1} = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot (n+1) \binom{2n+2}{n+1},
\end{aligned}$$

ami éppen az $n+1$-re vonatkozó állítás.

Ezzel a teljes indukciót befejeztük. A feladat állítását beláttuk.