Megoldás. A kifejezés minden valós x-re értelmezett, mivel

$$\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}\cdot x+x^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Legyenek a derékszögű koordináta-rendszerben az A pont koordinátái $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a B pont koordinátái $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, továbbá a C pont koordinátái $(x;0)$. Az A és B pontok helye rögzített, míg a C pont az x-tengely tetszőleges pontja. Ekkor

$$AC=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},\qquad BC=\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Az tehát a kérdés, hogy az x-tengely melyik pontjára lesz az $AC+BC$ hossza minimális. Ha a C pont az AB szakasz és az x-tengely metszéspontja, akkor a két távolság összege éppen az AB szakasz hosszával egyenlő, minden más C' pontjára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$AC'+BC'>AB.$$

A keresett minimum az AB távolság:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}=$$
$$=\sqrt{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

Ezt a minimális értéket arra a pontra kapjuk, amelyben az AB egyenes metszi az x-tengelyt.

Az AB egyenes egyenlete

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot x+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=y,$$
$$y=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cdot x+\frac{2}{\sqrt{3}-1}.$$

Az x-tengellyel a metszéspont az a pont lesz, amelynek második koordinátája 0.

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1.$$

Tehát az $\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}\cdot x+x^2}$ kifejezés minimuma $\sqrt{2}$, minimumhelye $x=\sqrt{3}-1$.