Megoldás. A megoldás alapötlete, hogy megkeressük azt a harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei éppen x, y és z. A harmadfokú egyenlet legyen

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0.$$

A harmadfokú egyenlet főegyütthatóját tekinthetjük 1-nek ($a = 1$), ezért a Viète-formulák harmadfokú egyenletre:

$$\begin{aligned} x + y + z &= -b, \\ xy + yz + zx &= c, \\ xyz &= -d. \end{aligned}$$

Azt rögtön látjuk, hogy $b = -3$. A második egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva:

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = -\frac{c}{d}.$$

Az x, y, z számok az egyenlet gyökei, így teljesül, hogy

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + cx + d &= 0, \\ y^3 - 3y^2 + cy + d &= 0, \\ z^3 - 3z^2 + cz + d &= 0. \end{aligned}$$

E három egyenlet összeadásával:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + c(x + y + z) + 3d = 0.$$

Rendezés és az ismert értékek beírása után

$$\begin{aligned} 45 + 3c + 3d &= 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 15 + c + d. \end{aligned}$$

Másrészt $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ alapján

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2c = 15 + 3c + d.$$

A második egyenlet átalakításából már tudjuk, hogy $d = -\dfrac{12c}{5}$, tehát

$$9 = 15 + 3c - \frac{12}{5}c.$$

Ebből rendezéssel

$$\frac{3}{5}c = -6, \quad c = -10.$$

Visszahelyettesítve végül $d = 24$. Megkaptuk azt a harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei x, y, z:

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 24 = 0.$$

A $t = 2$ értéket behelyettesítve látjuk, hogy ez lesz az egyenlet egyik gyöke. Emiatt a $(t - 2)$ gyöktényező kiemelhető az egyenletből.

$$\begin{aligned} t^3 - 2t^2 - t^2 + 2t - 12t + 24 &= 0, \\ (t - 2)\left(t^2 - t - 12\right) &= 0. \end{aligned}$$

A másodfokú tényező szorzattá alakításával

$$(t - 2)(t - 4)(t + 3) = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai a $(-3; 2; 4)$ számhármas és permutációi.