I. megoldás. Jelölje a szokásos módon az ABC háromszög oldalainak hosszát a, b és c, szögeit pedig α, β és γ. Tetszőleges P, Q, R pontok esetén legyen T_{PQR} a PQR háromszög területe. Ekkor az ismert területképlet szerint

$$2T_{ABC} = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta,$$

továbbá

$$2T_{A_1B_1C} = CA_1 \cdot CB_1 \sin\gamma, \quad 2T_{A_1BC_1} = BA_1 \cdot BC_1 \sin\beta$$

és

$$2T_{AB_1C_1} = AB_1 \cdot AC_1 \sin\alpha.$$

A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{BA_1}{CA_1} = c : b$, továbbá $BA_1 + CA_1 = a$, ezért

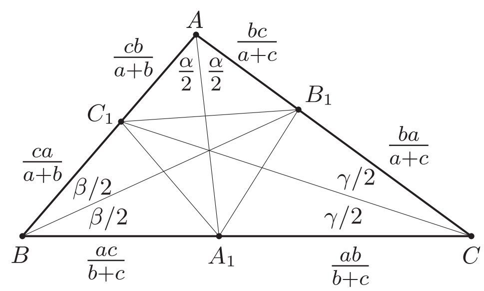
$$BA_1 = \frac{ac}{b+c} \quad \text{és} \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c}.$$

Hasonlóképpen kapjuk meg az AB_1, CB_1, AC_1 és BC_1 szakaszok hosszát is (*1. ábra*). Ezeket felhasználva

$$\frac{T_{A_1B_1C}}{T_{ABC}} = \frac{\frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{a+c}\sin\gamma}{ab\sin\gamma} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)},$$

és ugyanígy adódik, hogy

$$\frac{T_{A_1BC_1}}{T_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \quad \text{és} \quad \frac{T_{AB_1C_1}}{T_{ABC}} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$



1. ábra

Azt kell belátnunk, hogy ennek a három törtnek az összege legalább $3/4$, mert abból $T_{A_1B_1C_1} + T_{A_1B_1C} + T_{A_1BC_1} + T_{AB_1C_1} = T_{ABC}$ miatt következik, hogy

$$\frac{T_{A_1B_1C_1}}{T_{ABC}} \le \frac{1}{4}.$$

A bizonyítandó

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \ge \frac{3}{4}$$

egyenlőtlenséget $4(a+b)(b+c)(a+c)$-vel szorozva, majd egyszerűsítve és rendezve kapjuk, hogy

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 \ge 6abc.$$

$abc > 0$-val való osztás után elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 6$$

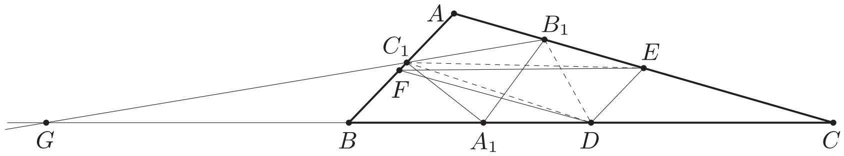
teljesül. Ez viszont igaz, mert tudjuk, hogy bármely pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2.

Az is látszik, hogy egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn, vagyis ha az ABC háromszög szabályos.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Feltehetjük, hogy a háromszög oldalainak hosszára $c \le b \le a$ teljesül. Legyenek az ABC háromszög oldalainak felezőpontjai a *2. ábra* szerint D, E és F. Ismert, hogy

$$\frac{T_{DEF}}{T_{ABC}} = \frac{1}{4},$$

ezért állításunk bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy $T_{DEF} \ge T_{A_1B_1C_1}$.



2. ábra

Először belátjuk, hogy $T_{DB_1C_1} \geq T_{A_1B_1C_1}$. Ha $b = c$, akkor $D = A_1$, ezért a két háromszög megegyezik. Ha $b > c$, akkor az I. megoldásban kiszámolt szakaszhosszakat felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{\frac{bc}{a+c}}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{a+c} < \frac{b}{c}.$$

Vagyis a B_1 pont távolabb van a BC oldaltól, mint a C_1 pont, tehát a $G = B_1C_1 \cap BC$ pontra teljesül, hogy a GC szakasz tartalmazza a B pontot. A $c < b$ feltételből az is következik, hogy $BA_1 < A_1C$, és mivel D felezi a BC szakaszt, azért $BA_1 < BD$. Ha viszont egy szög egyik szárán távolodunk a szög csúcsától, akkor a szög másik szárának egyenesétől is egyre messzebb kerülünk (*3. ábra*). Ezért D messzebb van a B_1C_1 egyenestől, mint A_1, a DB_1C_1 és $A_1B_1C_1$ háromszögek közül az első területe a nagyobb, mert a közös oldalukhoz tartozó magasságaik közül is az elsőé a nagyobb.

3. ábra. $OP_1 < OP_2 \iff d_1 < d_2$

Ugyanígy látható be, hogy a $b \leq a$ feltevésből $T_{DEC_1} \geq T_{DB_1C_1}$ következik (ha $DC_1 \cap AC = H$, akkor a HC szakasz tartalmazza A-t és $AB_1 < B_1C$). Végül pedig DE és AB párhuzamossága miatt $T_{DEF} = T_{DEC_1}$, s így

$$T_{DEF} = T_{DEC_1} \geq T_{DB_1C_1} \geq T_{A_1B_1C_1},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.