I. megoldás. Használjuk a szokásos jelöléseket.

Mivel egy derékszögű háromszög oldalainak hossza pozitív, alkalmazhatjuk rájuk a négyzetes és számtani közép között fennálló egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

A Pitagorasz-tételt szerint $a^2+b^2=c^2$. Továbbá tudjuk, hogy $a+b+c=k$, ahol k állandó. Ez utóbbiból $a+b=k-c$ következik. Helyettesítsük be ezeket az (1) egyenlőtlenségbe:

$$\sqrt{\frac{c^2}{2}} \geq \frac{k-c}{2}.$$

Mivel $c>0$, ebből:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \geq \frac{k-c}{2}.$$

Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy:

$$c\big(\sqrt{2}+1\big) \geq k, \quad \text{majd} \quad c \geq \frac{k}{\sqrt{2}+1} = \big(\sqrt{2}-1\big)k.$$

Mivel k állandó, az átfogó legalább $\big(\sqrt{2}-1\big)k$. Létezik is olyan háromszög, amelynek éppen ekkora az átfogója, ennek a befogóinak hossza:

$$a=b=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)k.$$

Megjegyzés. Sokan az (1) egyenlőtlenség felírása után azt mondták, hogy

$$c \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b),$$

ahol egyenlőség $a=b$ esetén áll fenn, tehát egyenlő szárú háromszögre lesz a legkisebb az átfogó, és kiszámolták, hogy akkor mennyi az átfogó hossza. Ez nem teljes megoldás. Egyrészt, ha adott a kerület, akkor leszűkül a szóba jövő $(a;b)$ számpárok halmaza. Másrészt közepek közti egyenlőtlenség használata esetén az egyik oldal értékét tudni szoktuk, vagyis a becslés úgy néz ki, hogy egy kifejezés legalább/legfeljebb akkora, mint egy konkrét érték. És ebben az esetben lehet azt mondani, hogy a kifejezés minimuma/maximuma ez a konkrét érték, melyet (a példabeli esetben) $a=b$ esetén vesz fel.

II. megoldás. Használjuk a szokásos jelöléseket.

Alkalmazzuk a derékszögű háromszög oldalainak négyzetére a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}. \tag{2}$$

A Pitagorasz-tétel szerint $c^2=a^2+b^2$, ezt írjuk be a (2) egyenlőtlenségbe:

$$\frac{c^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}, \qquad c^2 \geq 2ab.$$

Mindkét oldalhoz $c^2=a^2+b^2$-et adva: $(a+b)^2 \leq 2c^2$, majd $a+b \leq \sqrt{2}c$ következik. Írjuk be ezt az $a+b+c=k$ egyenlőségben $a+b$ helyébe:

$$k=a+b+c \leq \sqrt{2}c+c=\big(1+\sqrt{2}\big)c,$$

amiből $c \geq \dfrac{k}{1+\sqrt{2}}$ következik. Egyenlőség $a=b=\big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\big)k$ esetén áll fenn.

Megjegyzés. Sokan a (2) egyenlőtlenség felírása után azt mondták, hogy $c \geq \sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}$, ahol egyenlőség $a=b$ esetén áll fenn, tehát egyenlő szárú háromszögre lesz a legkisebb az átfogó, és kiszámolták erre az esetre az átfogó hosszát. Ez sem teljes megoldás.

III. megoldás. A derékszögű háromszög kerületét felírhatjuk a következőképpen ($\alpha \in\,]0,\pi/2[$):

$$k=c+c\sin\alpha+c\cos\alpha=c(1+\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Fejezzük ki az átfogót:

$$c=\frac{k}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Adott k esetén ennek akkor van minimuma, amikor a nevezőnek és egyben $(\sin\alpha+\cos\alpha)$-nak maximuma.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+\pi/4).$$

Ez pedig az adott intervallumon $\alpha=\pi/4$ esetén veszi fel a legnagyobb értékét. Így a $c=\dfrac{k}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ a legkisebb értékét $\alpha=\pi/4$ (vagyis egyenlő szárú háromszög) esetén veszi fel, és a felvett minimum

$$c=\frac{k}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{k}{1+\sqrt{2}}.$$

IV. megoldás. Minimum és maximumérték sokszor szokott lenni egyenlő szárú háromszög esetén, nézzük meg ezt most is. Legyen a szárak hossza a (így nyilván $a>0$), ekkor az átfogó $\sqrt{2}a$, a kerület pedig: $k=\big(2+\sqrt{2}\big)a$.

Növeljük az egyik befogót x-szel, a másikat pedig csökkentsük y-nal $(x,y>0)$, és nézzük meg, változatlan kerület mellett hogyan változik az átfogó.

Ha a két befogó $a-x$, illetve $a+y$, akkor k kerület mellett az átfogó

$$\big(2+\sqrt{2}\big)a-(a-x)-(a+y)=\sqrt{2}a+x-y.$$

Azt szeretnénk belátni, hogy $x>y$, hiszen ekkor az átfogó nagyobb, mint az egyenlő szárú háromszög esetén.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt, majd rendezzük a kapott egyenletet:

$$\begin{gathered}
(a-x)^2+(a+y)^2=\big(\sqrt{2}a+x-y\big)^2,\\
a^2-2ax+x^2+a^2+2ay+y^2=2a^2+x^2+y^2+2\sqrt{2}ax-2\sqrt{2}ay-2xy,\\
-2ax+2ay=2\sqrt{2}ax-2\sqrt{2}ay-2xy,\\
0=ax\big(2+2\sqrt{2}\big)-ay\big(2+2\sqrt{2}\big)-2xy,\\
0=a\big(2+2\sqrt{2}\big)(x-y)-2xy.
\end{gathered}$$

Mivel a, x és y pozitívak, a jobb oldal csak úgy lehet 0, ha $x-y>0$, vagyis $x>y$.

Ezzel beláttuk, hogy egyenlő szárú háromszög esetén a legkisebb az átfogó.

Ha az átfogó c, akkor a befogó $c/\sqrt{2}$, a kerület pedig:
$k=c\big(1+2/\sqrt{2}\big)=c\big(1+\sqrt{2}\big)$, ahonnan

$$c=\frac{k}{\sqrt{2}+1}.$$

V. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy adott átfogó mellett mekkora lehet legfeljebb a két befogó összege. Vagyis adott c esetén keressük $a+b$ maximumát, jelölje ezt p. Ekkor k maximuma $p+c$, mely adott $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ szögű háromszög esetén lép fel. A kérdést megfordítva: Ha rögzített a kerület, akkor az átfogója a minimális értékét az α_1; β_1; γ_1 szögek esetén veszi fel.

A Pitagorasz-tétel miatt $a^2+b^2=c^2$. Mivel c adott, így c^2 és a^2+b^2 is az.

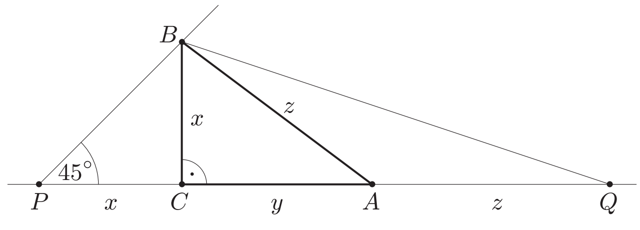
$a+b$ akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a négyzete is az: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Ebből a^2+b^2 adott, tehát $(a+b)^2$ és így $a+b$ akkor lesz a legnagyobb, amikor $2ab$, és egyben ab felveszi a maximumát.

A Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszögnek az átfogóval szemközti csúcsa az átfogó Thalész-körén helyezkedhet el. Legyen a c átfogóhoz tartozó magasságvonal m. Ekkor a háromszög területe $\dfrac{ab}{2}=\dfrac{cm}{2}$, vagyis $ab=cm$. Mivel c adott, ezért ez akkor lesz a legnagyobb, amikor m a lehető legnagyobb, ez pedig akkor következik be, amikor m egyben a c oldal felező merőlegese is, vagyis amikor a háromszög egyenlő szárú.

Egyenlő szárú háromszög esetén pedig a kerület $\big(2+\sqrt{2}\big)a$, az átfogó $\sqrt{2}a$, ami a kerületnek az $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$-szerese.

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenetet alkalmazott *Bauer Márton* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., 9. évf.): A harmadik csúcs az átfogó két végpontja, mint fókusz köré szerkesztett ellipszisen helyezkedik el. A lehető legnagyobb ellipszis, aminek vannak közös pontjai a körrel, az amelyik a kört két ponton érinti. Ezek a pontok az átfogóhoz írható egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsai.

VI. megoldás. Legyen ABC derékszögű háromszög, és a kerületét, k-t mérjük fel AC egyenesére az *1. ábrának* megfelelően.



1. ábra

Mivel PCB egyenlő szárú derékszögű háromszög, $CPB\sphericalangle = 45°$. Emiatt a B csúcs a PQ-val $45°$-os szöget bezáró félegyenesen helyezkedik el A-tól z távolságra, tehát a B pont az A pont körül z sugárral húzott kör és a félegyenes közös pontja. Ezért AB legalább akkora, mint az A pont és a PB félegyenes távolsága. Így

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}AP = \frac{\sqrt{2}}{2}(k-AQ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(k-AB),$$

vagyis

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(k-AB),$$

amiből rendezéssel $2AB \geq \sqrt{2}k - \sqrt{2}AB$, majd $AB\left(2+\sqrt{2}\right) \geq \sqrt{2}k$, végül

$$AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}k = \frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}k = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}k = \left(\sqrt{2}-1\right)k.$$

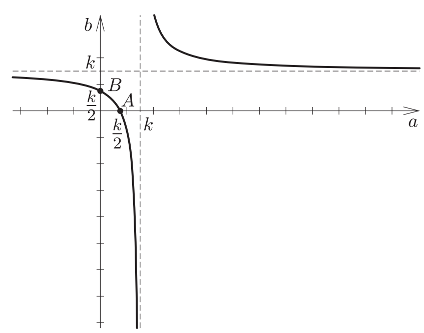
Ebből következik, hogy AB legkisebb értéke $\left(\sqrt{2}-1\right)k$, ami akkor következik be, amikor az A középpontú, z sugarú kör érinti a PB félegyenest. Ekkor $PBA\sphericalangle = 90°$, és így $PAB\sphericalangle = 45°$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

VII. megoldás. Az első megoldás megjegyzésében említettük, hogy a feladatban leszűkül az a tartomány, amelyre a közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk. Vizsgáljuk ezt meg jobban. Adott a k állandó, és $k=a+b+c$. Ebből

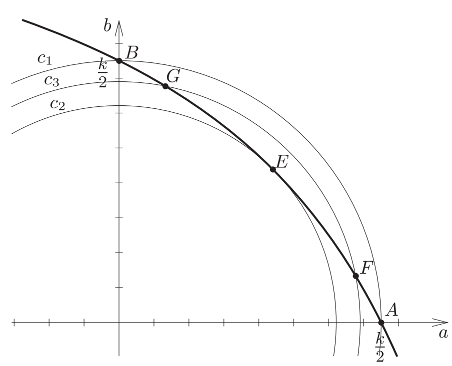
$$\begin{aligned} k^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 2\left(c^2+ab+ac+bc\right) = \\ &= 2(a+c)(b+c) = 2(k-b)(k-a), \end{aligned}$$

amiből $(a-k)(b-k) = \dfrac{k^2}{2}$.

Ezt ábrázolva látható, hogy azok az $(a;b)$ számpárok lesznek egy k kerületű háromszög befogói, amelyek a megfelelő hiperbola-ív $A\left(\dfrac{k}{2};0\right)$ és $B\left(0;\dfrac{k}{2}\right)$ pontjai közé esnek (*2. ábra*).



2. ábra



3. ábra

Mivel a Pitagorasz tétel szerint $a^2+b^2=c^2$, így egy O középpontú, c sugarú kör és a hiperbola-ív metszéspontjainak koordinátái egy megfelelő (k kerületű) háromszög befogóinak hosszát adják (*3. ábra*).

A c értéke kisebb, mint a c_1 kör sugara, vagyis $\dfrac{k}{2}$, és legalább akkora, mint a c_2 kör sugara. (A c_3 kör egy „köztes" kört mutat, ahol F és G két megfelelő háromszög koordinátáit adják.) A c_2 kör az E pontban érinti a hiperbola-ívet, a szimmetria miatt két koordinátája egyenlő. Tehát c értéke egyenlő szárú háromszög esetén lesz minimális, kiszámolható (lásd pl. a IV. megoldást), hogy ekkor $c=\left(\sqrt{2}-1\right)k$.