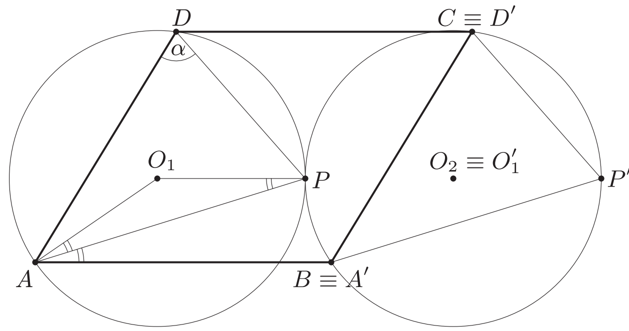
Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Legyen O_1 az APD, O_2 pedig a BCP háromszög köré írható kör középpontja. Toljuk el az APD háromszöget az $\overrightarrow{AB}$ vektorral. Ekkor A képe B, D képe C, a P és az O_1 pontok képét pedig jelölje P', illetve O_1'. Az eltolás miatt $APD\sphericalangle = BP'C\sphericalangle$, ezért az $APD\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 180^\circ$ feltételből következik, hogy $BP'CP$ húrnégyszög. Tehát a BCP és BCP' háromszögek köré írható körök egybeesnek, azaz $O_1' \equiv O_2$, vagyis $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AB}$.

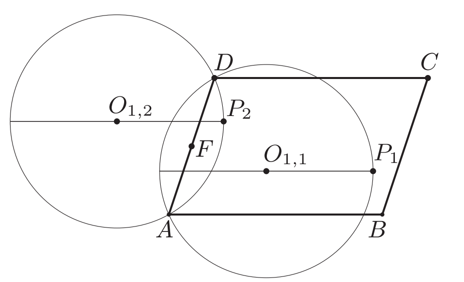


1. ábra

Legyen $PDA\sphericalangle = \alpha$. Ekkor a $PAB\sphericalangle + PDA\sphericalangle = 90^\circ$ feltételből következik, hogy $\alpha < 90^\circ$ és $PAB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Mivel egy középponti szög kétszerese az ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögnek, azért $AO_1P\sphericalangle = 2\alpha$, s így az APO_1 egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $APO_1\sphericalangle = PAO_1\sphericalangle = 90^\circ - \alpha = PAB\sphericalangle$ (*1. ábra*). Mivel P a paralelogramma belső pontja, ez azt jelenti, hogy $APO_1\sphericalangle$ és $PAB\sphericalangle$ váltószögek, tehát O_1P párhuzamos AB-vel. Azonban O_1O_2 is párhuzamos AB-vel és $O_1P = O_2P$ (mert az O_i pontok a P-n átmenő körök középpontjai), ezért P az O_1O_2 szakasz felezőpontja. Ebből az is következik, hogy

$$O_1A = O_1P = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Ennek alapján a szerkesztést már könnyen elvégezhetjük. Először megszerkesztünk egy olyan kört, amely áthalad az A és D pontokon, sugara pedig fele az AB szakasz hosszának. Ennek középpontja lesz O_1. Az $AB > BC$ feltételből következik, hogy pontosan két ilyen kör létezik, és azok az AD szakasz F felezőpontjára szimmetrikusan helyezkednek el (*2. ábra*). Ezután megszerkesztjük a körnek AB-vel párhuzamos átmérőjét, ami nek a paralelogramma belsejébe eső végpontja lesz a keresett P pont. A fentiekből világos, hogy az így kapott pont valóban megoldása is a feladatnak.



2. ábra

A feladatnak tehát akkor van megoldása, mégpedig pontosan kettő, ha a szóban forgó átmérő az AB és CD egyenesek közé esik, azaz ha $DAB\sphericalangle \le 90^\circ$, akkor $FAO_1\sphericalangle < DAB\sphericalangle$, ha pedig $DAB\sphericalangle > 90^\circ$, akkor $FAO_1\sphericalangle < 180^\circ - DAB\sphericalangle$ teljesül. Ez mindkét esetben ekvivalens azzal, hogy fennáll a $\cos FAO_1\sphericalangle > |\cos DAB\sphericalangle|$ egyenlőtlenség, azaz

$$|\cos DAB\sphericalangle| < \frac{FA}{AO_1} = \frac{DA}{AB},$$

vagyis teljesül az $AD > AB \cdot |\cos DAB\sphericalangle|$ egyenlőtlenség.