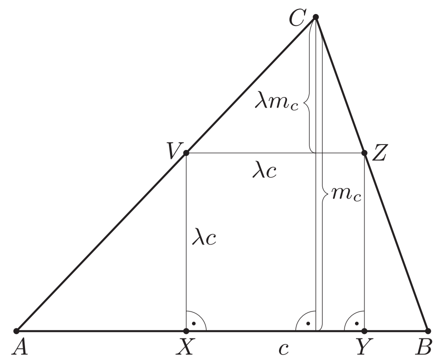
Megoldás. A négyzet négy csúcsa közül kettő a háromszögnek ugyanarra az oldalára esik, a háromszög másik két oldalán pedig egy-egy csúcsa kell, hogy legyen a négyzetnek. Feltehetjük, hogy az ABC háromszög oldalain az *ábrán* látható módon helyezkednek el az $XYZV$ négyzet csúcsai, esetleg az X csúcs egybeeshet A-val, vagy az Y csúcs B-vel.



A négyzet VZ oldala párhuzamos az AB egyenessel, ezért az ABC és a VZC háromszögek hasonlók. Legyen a hasonlóság aránya λ. Ekkor ha akkor a négyzet oldalainak hossza λc, s ha az ABC háromszög C-hez tartozó magasságának hossza m_c, akkor a VZC háromszög C-hez tartozó magasságának hossza λm_c. A négyzet VX oldala párhuzamos a háromszögek C-hez tartozó magasságaival, ezért

$$m_c = \lambda m_c + VX = \lambda m_c + \lambda c, \quad \text{vagyis} \quad \lambda = \frac{m_c}{m_c + c},$$

és ezért $0 < \lambda < 1$.

Legyen az ABC háromszög területe T. Ekkor $m_c = 2T/c$, tehát

$$\lambda = \frac{m_c}{m_c + c} = \frac{2T}{2T + c^2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$1 - \lambda = \frac{c^2}{2T + c^2}.$$

Ezeket felhasználva a négyzet és az ABC háromszög területének aránya

$$\frac{(\lambda c)^2}{T} = 2\lambda^2 \frac{c^2}{2T} = 2\lambda \frac{2T}{2T + c^2} \cdot \frac{c^2}{2T} = 2\lambda \frac{c^2}{2T + c^2} =$$
$$= 2\lambda(1 - \lambda) \leq 2\left(\frac{\lambda + (1 - \lambda)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

ahol a becslésnél a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget használtuk (ezt megtehettük, hiszen λ és $1 - \lambda$ is pozitív). Ebben egyenlőség akkor áll fenn, ha $\lambda = 1/2$. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{2T}{2T + c^2} = \frac{1}{2},$$

azaz ha $c^2 = 2T$, vagyis $c = m_c$.

A négyzet tehát a háromszög területének legfeljebb a felét fedheti le, s pontosan akkor fedi le a felét, ha a háromszög egyik magasságának hossza megegyezik a hozzá tartozó oldal hosszával, és a négyzet egyik oldala a háromszögnek ezen az oldalán van.