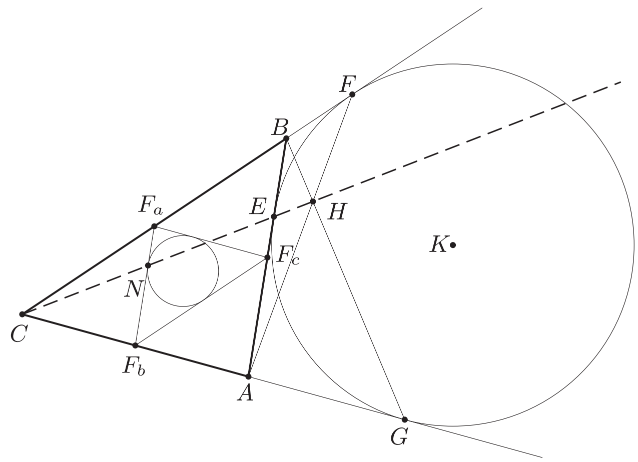
Megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait és félkerületét a szokásos módon a, b, c, s betűkkel. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, továbbá tudjuk, hogy a hozzáírt körhöz a legtávolabbi csúcsból húzott érintőszakaszok hossza s. Ezek alapján

$$AE = AG = CG - CA = s - b.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel

$$BE = BF = CF - BC = s - a.$$



1. ábra

A H pont akkor és csak akkor van rajta a CE egyenesen, ha az AF, BG és CE egyenesek egy pontban metszik egymást. Alkalmazzuk Ceva tételének megfordítását az ABC háromszögre és az oldalegyenesein fekvő E, F és G pontokra. A három egyenes pontosan akkor metszi egymást egy pontban, ha

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1.$$

Ez akkor is fennáll, ha előjeles szakaszokkal számolunk; pontosan két szakasz (BF és GA) előjele lesz negatív. Az eddigiek alapján $CG = CF$, $AE = AG$, továbbá $BE = BF$, tehát a hányadosok előjeles szorzata valóban 1. Így a H pont rajta van a CE egyenesen.

Belátjuk még, hogy az N pont is rajta van a CE egyenesen. Az $F_aF_bF_c$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz és oldalai, megfelelő szakaszai feleakkorák. Mivel $F_aF_c = \dfrac{b}{2}$, a kerület fele pedig $\dfrac{s}{2}$, az F_b pontból húzott érintőszakasz $\dfrac{s-b}{2}$. Az ABC háromszögnek az F_bF_aC háromszög a C pontból felére kicsinyített képe. Beláttuk, hogy az F_bN szakasz éppen fele olyan hosszúságú, mint az AE szakasz, tehát az E pont képe az N pont, az N pont a CE szakasz felezőpontja.

A H, E és N pontok tehát valóban egy egyenesen vannak.