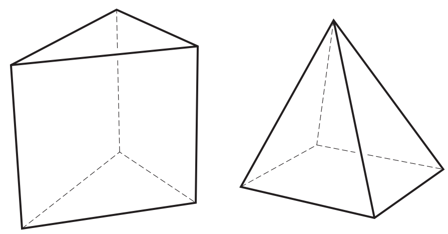
Megoldás. Legyen K egy ötlapú konvex poliéder. Ha K lapjai közt öt- vagy többoldalú sokszög is előfordulna, akkor K-nak legalább hat lapja lenne. Tehát a lapok közt csak háromszögek és négyszögek vannak. Legyen a háromszöglapok száma h. Ekkor a négyszöglapok száma $5-h$. Jelölje e a test éleinek a számát. Minden él pontosan két lapon van rajta, ezért a test éleit laponként összeszámolva az élszám kétszeresét kapjuk, azaz

$$3h+4(5-h)=2e, \quad \text{vagyis} \quad h=20-2e.$$

Tehát h páros szám, és mivel 6-nál kisebb, a lehetséges értékei 0, 2 és 4.

Először megmutatjuk, hogy $h=0$ nem lehetséges. Ekkor ugyanis K-nak öt darab négyszöglapja lenne. Ha ezek közül valamelyik csúcsban négy találkozna, akkor a négy lap mindegyikének a közös csúcson át 2-2 éle menne, az ezen a csúcson át nem menő összesen $4\cdot 2=8$ él mindegyikének illeszkednie kellene a test ötödik négyszöglapjára, ami nem lehetséges. Ha viszont minden csúcsban pontosan három lap találkozna (legalább három lapnak találkoznia kell minden csúcsban), akkor a csúcsok száma $(4\cdot 4)/3$ lenne, ami nem egész szám.

Ha $h=2$, akkor minden négyszöglapnak legalább két négyszöglap szomszédja van. Tekintsünk két szomszédos négyszöglapot. Ezekre összesen 6 csúcs illeszkedik. Viszont a testnek összesen legfeljebb $(2\cdot 3+3\cdot 4)/3=6$ csúcsa van, azaz a testnek nincs további csúcsa. Ez csak úgy lehetséges, ha a két négyszöglap közös élére nem illeszkedő összesen 4 csúcs mindegyike a harmadik négyszöglap csúcsa. Tehát a test háromszöglapjai „szemben” vannak egymással, nincs közös csúcsuk. Ilyen testek léteznek, legegyszerűbb példa az *1. ábrán* látható háromszögalapú hasáb.



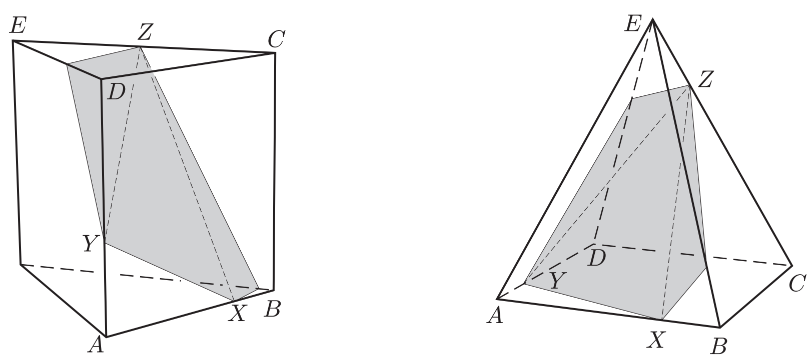
1. és 2. *ábra*

Végül ha $h=4$, akkor K-nak egyetlen négyszöglapja van, aminek minden éléhez egy-egy háromszöglap illeszkedik. Ekkor a csúcsok száma legfeljebb

$$\frac{4\cdot 3+1\cdot 4}{3}<6,$$

tehát a háromszöglapoknak egy közös csúcsuk kell, hogy legyen. Ekkor K négyszög alapú gúla (*2. ábra*).

Meg kell még mutatnunk, hogy mindig létezik olyan sík, amely K egyik csúcsán sem megy át, de mindegyik lapját metszi.



3. ábra

Legyen $ABCD$ a K egyik négyszöglapja, CE pedig egy erre nem illeszkedő éle. Vegyünk fel az AB, AD és CE élek belsejében egy-egy X, Y és Z pontot a *3. ábra* szerint. Ezek a pontok nyilván nem esnek egy egyenesre és az általuk meghatározott sík nem tartalmazza K-nak egyetlen élét sem. Az XYZ síknak a K poliéder minden lapjával van csúcstól különböző közös pontja, ezért annak mind az 5 lapját metszi.