Megoldás. Felhasználva, hogy

$$BB'C\sphericalangle = CC'B\sphericalangle = 90°, \quad AA'D\sphericalangle = DD'A\sphericalangle = 90°,$$

a $BB'C'C$ és az $AA'D'D$ négyszög is húrnégyszög csakúgy, mint $AB'A'B$ és $CD'C'D$.

A kerületi szögek tétele alapján (az $ABCD$ húrnégyszögben) a BC húr az A és D pontokból ugyanakkora szögben látszik, azaz $BAC\sphericalangle = BDC\sphericalangle$. Hasonlóan, az $AA'D'D$ húrnégyszögben $A'AD'\sphericalangle = A'DD'\sphericalangle$. Így

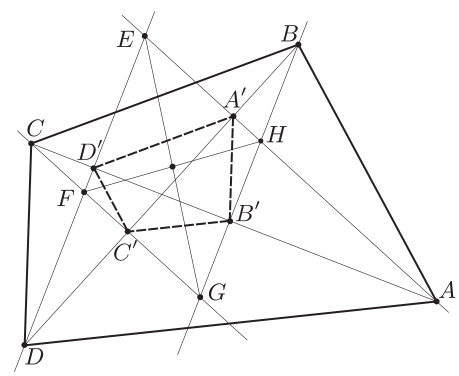
$$BAA'\sphericalangle = BAC\sphericalangle - A'AD'\sphericalangle = BDC\sphericalangle - A'DD'\sphericalangle = D'DC\sphericalangle.$$

Az $ABA'B'$ húrnégyszögben $A'B'B\sphericalangle = BAA'\sphericalangle$, a $CDC'D'$ húrnégyszögben pedig $D'C'C\sphericalangle = D'DC\sphericalangle$, ezért $D'C'C\sphericalangle = A'B'B\sphericalangle$, ahonnan

$$D'C'A'\sphericalangle = 90° - D'C'C\sphericalangle = 90° - A'B'B\sphericalangle = A'B'D'\sphericalangle,$$

tehát – a kerületi szögek tételének megfordításával – $A'B'C'D'$ húrnégyszög.

Hátra van annak a belátása, hogy az $A'B'C'D'$ húrnégyszög köré írt körének középpontja éppen az $EFGH$ négyszög átlóinak metszéspontja. Mivel az EF és GH egyenesek az AC átlóra, EH és FG pedig a BD-re merőlegesek, az $EFGH$ négyszög paralelogramma, aminek a középpontja az átlóinak a metszéspontja. E paralelogramma középpontján keresztül az EF és GH oldalakkal párhuzamos egyenes (e két egyenes középpárhuzamosa) merőleges $D'B'$-re, és minden pontja egyenlő távolságra van az EF és a GH egyenesektől.



Ebből következik, hogy ez az egyenes a $D'B'$ szakasz felező merőlegese. Ezzel azt kaptuk, hogy az $EFGH$ paralelogramma középpontja rajta van a $D'B'$ szakasz felező merőlegesén, és ehhez teljesen hasonlóan az $A'C'$ szakasz felező merőlegesén is. E két egyenesnek azonban egyetlen közös pontja az $A'B'C'D'$ húrnégyszög köré írt körének a középpontja.

Megjegyzés. Ha az átlók metszéspontja M, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az AMB szög hegyesszög. Ebben az esetben az A', B', C', D' pontok rendre az MB, MA, MD, MC nyílt félegyeneseken helyezkednek el. Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy az említett pontok az MB, MA, MD, MC belsejébe esnek; a feladat állítása a többi esetben is a leírthoz hasonló meggondolásokkal igazolható.