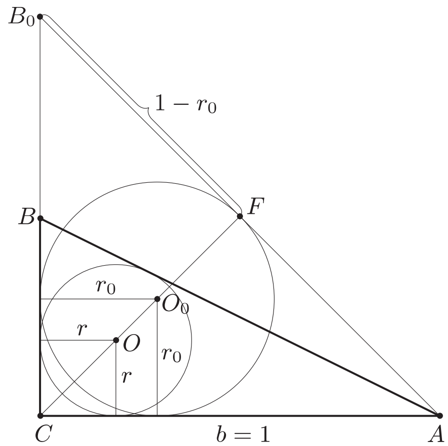
I. megoldás. Az ABC derékszögű háromszögben (C a derékszög csúcsa) legyen AC a hosszabbik befogó. A könnyebb számolás végett a b oldal legyen egységnyi, a $BC = a$ befogó hossza $a \leq 1$. Jelölje O a beírt kör középpontját, amely az A-ból és C-ből induló szögfelezők metszéspontja.

Tekintsük azt az egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek csúcsai A, C és B_0, $B_0C = 1$ és B_0 a CB félegyenesen van. A C-ből induló szögfelező az AC egyenessel 45°-os szöget zár be. Messe ez az AB_0 oldalt az F pontban. Legyen az AB_0C háromszögbe írt kör középpontja O_0.



Mivel O az ABC háromszög belsejében van, azért O rajta van a CF szakaszon. Az ABC háromszögbe írt kör r sugara kisebb, mint az O_0 pontnak az AC egyenestől való távolsága, ami éppen az AB_0C háromszögbe írt kör r_0 sugara.

Mivel $AC = B_0C = 1$, $AB_0 = \sqrt{2}$. Az érintő szakaszok hosszának egyenlőségéből felírhatjuk, hogy

$$1 - r_0 + 1 - r_0 = \sqrt{2}, \quad \text{és innen} \quad r_0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}293 < \frac{3}{10}.$$

Pontosabban számolva: elég belátni, hogy $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \dfrac{3}{10}$, azaz $\dfrac{7}{5} \leq \sqrt{2}$, vagyis $7 \leq 5\sqrt{2}$, négyzetre emelve $49 < 50$, ami igaz.

II. megoldás. Ismeretes (és könnyen belátható), hogy a derékszögű háromszögbe írható kör r sugarára fennáll a következő egyenlőség: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Írjuk c helyébe a vele egyenlő $\sqrt{a^2+b^2}$-et:

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Felhasználva, hogy $\dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$ (a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt), felírhatjuk, hogy

$$r \leq \frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a+b}{2} \leq b\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{3}{10}b,$$

ahogy azt már az előbbi bizonyításban is láttuk.

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.