

Megoldás. Az egyenest a számegyenessel, a Z halmazt az egész számokkal azonosíthatjuk. Nyilván elég belátni, hogy a pozitív egészek halmaza felbontható H -val egybevágó részhalmazokra. Azt is feltehetjük, hogy $H = \{0, a, a+b\}$, ahol $0 < a \leq b$. A pozitív egészeknek H -val egybevágó részhalmazai ekkor $A_x = \{x, x+a, x+a+b\}$ vagy $B_x = \{x, x+b, x+a+b\}$ alakúak, ahol $x > 0$. Az első lépésben fedjük le az 1-et A_1 -gyel, majd az i -edik lépésben (ahol $i = 2, 3, \dots$) fedjük le a legkisebb, az azt megelőző lépésekben még le nem fedett x pontot A_x -szel, ha $x+a$ addig fedetlen volt, ellenkező esetben pedig B_x -szel, ha $x+b$ volt addig fedetlen. Az i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy legalább az egyik feltétel valóban teljesül, és az újonnan felhasznált háromelemű halmaz a már korábban felhasználtak mindegyikétől diszjunkt. Tételezzük fel először indirekten azt, hogy az i -edik lépést nem tudjuk végrehajtani, mivel a korábbi lépéseink során már $x+a$ -t és $x+b$ -t is lefedtük. A korábban felhasznált fedő halmazok nem tartalmazhatják x -et, és legkisebb elemük csak x -nél kisebb lehet; ezért $x+a$ fedésére az A_{x-b} vagy B_{x+a-b} jöhetett csak szóba (az utóbbi is csak akkor, ha $a < b$). Hasonlóan, $x+b$ fedése csak a B_{x-a} -val történhetett. Ez azonban ellentmondás, hiszen B_{x-a} választása valamelyik $j < i$ -edik lépésben arra utal, hogy akkor $x-a$ lefedésére A_{x-a} nem volt alkalmas, azaz akkor $(x-a) + a = x$ már le volt fedve. Ezzel beláttuk, hogy végrehajtható az i -edik lépés. Az ennek során felhasznált A_x vagy B_x halmaz csak a legnagyobb elemében, $x+a+b$ -ben metszhetné a korábban felhasznált fedő halmazok valamelyikét, de akkor az eljárásunk miatt annak is $x+a+b$ lenne a legnagyobb eleme, vagyis legkisebb elemeik is egyenlőek lennének; tehát x -et már korábban lefedtük volna.

Indukciós bizonyításunk egyben algoritmus a pozitív egészek halmazának, és ennél fogva Z -nek is a kívánt felbontására.