I. megoldás. Azt kell igazolnunk, hogy

$$S=\frac{z^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{x^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{y^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\geq 2.$$

Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosságot, valamint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva

$$S\geq 3\sqrt[3]{\frac{z^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{x^3+z^3}{y^2+yz+z^2}\cdot\frac{y^3+x^3}{z^2+zx+x^2}}=$$
$$=3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\sqrt[3]{\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{y^2-yz+z^2}{y^2+yz+z^2}\cdot\frac{z^2-zx+x^2}{z^2+zx+x^2}}.$$

Tetszőleges a, b valós számokra $0\leq 2(a-b)^2$ miatt fennáll az $a^2+ab+b^2\leq 3\big(a^2-ab+b^2\big)$ egyenlőtlenség. Ha belátjuk, hogy $\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 2$ is igaz, akkor ezeket felhasználva a kívánt $S\geq 3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{3}=2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget és az $xyz=1$ feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\geq\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}=xyz=1.$$

Ezért $\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 2$ valóban teljesül, és így a fentiek szerint a bizonyítandó $S\geq 2$ egyenlőtlenség is. A megoldásból az is látszik, hogy egyenlőség pontosan az $x=y=z=1$ esetben áll fenn.

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a z^3+y^3, x^3+z^3, y^3+x^3 és az y^2+yz+z^2, z^2+zx+x^2, x^2+xy+y^2 számhármasok azonosan rendezettek. Így a rendezési tétel szerint

$$S=\frac{z^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{x^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{y^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\geq$$
$$\geq\frac{z^3+y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{x^3+z^3}{z^2+zx+x^2}+\frac{y^3+x^3}{x^2+xy+y^2}.$$

Az I. megoldásban igazolt $a^2+ab+b^2\leq 3\big(a^2-ab+b^2\big)$ összefüggést felhasználva megmutatjuk, hogy az ily módon kapott összeg $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$ alakú tagjai (ahol a, b pozitív számok) alulról becsülhetők $\dfrac{a+b}{3}$-mal:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}=(a+b)\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{a+b}{3}.$$

Ezt a becslést, továbbá a számtani és mértani közép közötti összefüggést alkalmazva a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$S\geq\frac{z+y}{3}+\frac{x+z}{3}+\frac{y+x}{3}=2\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq 2\cdot\sqrt[3]{xyz}=2.$$