Megoldás. Pontosan akkor létezik, ha k-nak nincsen 2-től és 5-től különböző prímosztója. Először megmutatjuk, hogy $k=2$-re $c_2=\dfrac{1}{5}$ megfelelő, vagyis

$$S(2n) \geq \frac{S(n)}{5}$$

minden n pozitív egész számra teljesül. A 2-vel való szorzást a következő módon is elvégezhetjük. Először minden helyiértékre az ott lévő számot megszorozzuk 2-vel, az így kapott számok mindegyike legfeljebb $2\cdot 9=18$ lehet. Ezután, ahol kétjegyű számot kaptunk, ott annak értékét 10-zel csökkentjük, és átvisszük a maradékot, vagyis az eggyel nagyobb helyiértéken álló számot 1-gyel növeljük. Mivel ily módon csak páros egyjegyű számokat kell növelnünk 1-gyel, újabb maradék már nem keletkezik. Azaz $S(2n)$ értékét úgy is megkaphatjuk, hogy n számjegyeit külön-külön szorozzuk 2-vel, majd a kapott számok számjegyeit összeadjuk. Ezért elegendő az állítást abban a speciális esetben igazolni, amikor n egyjegyű vagy $n=0$. Rövid számolással ellenőrizhető, hogy ezekben az esetekben az egyenlőtlenség teljesül.

Ehhez teljesen hasonlóan igazolható, hogy $k=5$ esetén $c_5=\dfrac{1}{2}$ megfelelő. Az 5-tel való szorzásnál a maradék legfeljebb 4, ezt akár 0-hoz, akár 5-höz kell hozzáadnunk, újabb maradék már nem keletkezik. Így ebben az esetben is elegendő a $0,1,\ldots,9$ számokra ellenőrizni az állítást, amelyekre valóban igaz.

Ha a k számhoz c_k, az ℓ számhoz pedig c_ℓ megfelelő, akkor a $k\ell$ számhoz $c_{k\ell}=c_kc_\ell$ megfelelő lesz, ugyanis minden n pozitív egész szám esetén

$$S\big((k\ell)n\big)=S\big(k(\ell n)\big)\geq c_k\cdot S(\ell n)\geq c_k\cdot\big(c_\ell\cdot S(n)\big)=c_{k\ell}\cdot S(n).$$

Ezek szerint, ha a k számnak nincsen 2-től és 5-től különböző prímosztója, akkor található hozzá megfelelő c_k.

Az állításunk másik felének igazolásához tekintsünk egy olyan k számot, amelynek van 2-től és 5-től különböző prímosztója. Ekkor $\dfrac{1}{k}$ végtelen szakaszos tizedestört. Legyen $n=\left[\dfrac{10^m}{k}\right]$. Ekkor $S(n)$ az $\dfrac{1}{k}$ szám tizedesvessző utáni első m számjegyének összege, ami m növelésével tetszőlegesen naggyá tehető. Mivel $10^m<kn<10^m+k$, azért a kn szám első jegyét (ami 1) és utolsó s darab jegyét (ahol s a k számjegyeinek száma) leszámítva minden jegye 0, így $S(kn)\leq 9s+1$. Ezek alapján

$$\frac{S(kn)}{S(n)}\leq\frac{9s+1}{S(n)}.$$

A kapott egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés értéke pedig bármely pozitív számnál kisebb lehet. Ebben az esetben tehát nem létezik a feltételeket kielégítő c_k konstans.