**Megoldás.** Vizsgáljuk meg először algebrailag a tanulók által megadott képleteket.

A $b$) nyilván nem lehet a helyes megoldás, mivel $n = 3$ esetén az ábra $1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 13$ kis négyzetből áll, míg a képlet $1 + (n-1) \cdot 4 = 1 + (3-1) \cdot 4 = 9$ elemet jósol.

Az $a$), $c$), $d$) képletek szerinti műveleteket elvégezve:

$$(2n-1)^2 - 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 4n^2 - 4n + 1 - \big(2n^2 - 2n\big) = 2n^2 - 2n + 1,$$
$$1 + \big(1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) \cdot 4 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 = 1 + 2n(n-1) = 2n^2 - 2n + 1,$$
$$(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 = 2n^2 - 2n + 1.$$

Látható, hogy az utóbbi három képlet bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén azonos eredményt szolgáltat, ezért vagy mindegyik helyes, vagy pedig mindegyik hibás.

A továbbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy ezek az ötletek helyes gondolatokon alapulnak.

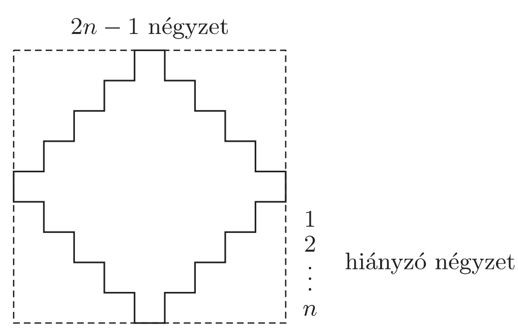
Az $a$) képlet azon az elven alapul, hogy az $n$. ábra belefoglalható egy $2n - 1$ egység oldalú négyzetbe. Ekkor a nagy négyzet csúcsainál kialakul négy egybevágó lépcsős szerkezetű alakzat, amelynek egyes szintjei rendre $1, 2, \ldots, (n-1)$ kis négyzetből állnak.

Az eredeti ábra részleteinek számát nyilván úgy kapjuk meg, ha a nagy négyzet alkotórészeinek számából levonjuk a négy lépcsős szerkezet elemeit.

Így a

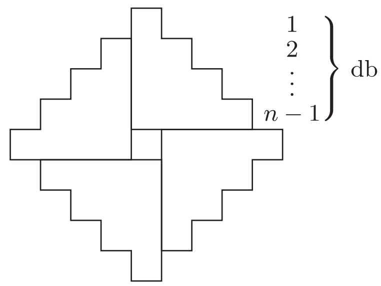
$$(2n-1)^2 - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) = (2n-1)^2 - 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

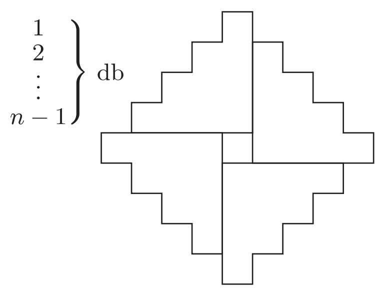
képlethez jutunk (*1. ábra*).



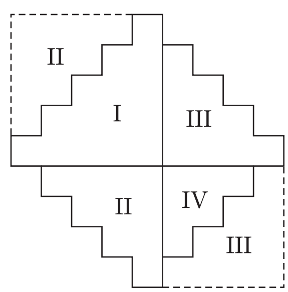

1. ábra

A $c$) képlethez akkor jutunk el, ha a *2. ábra* szerinti felosztást alkalmazzuk, vagyis kijelöljük a középső négyzetet és a többi részt négy egybevágó lépcsős alakzatra bontjuk fel, melyek egyes szintjei rendre $1, 2, \ldots, (n-1)$ kis négyzetből állnak. Így jutunk el az $1 + \big(1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) \cdot 4$ összeghez.




2. ábra




3. ábra

A $d$) képlethez akkor jutunk el, ha a *3. ábra* szerint az ábrát balról illetve felülről az $n$. szinten lévő négyzet után egy-egy függőleges és vízszintes vágással 4 részre bontjuk.

A rajzon megadott számozást alkalmazva a II-es és III-as részek áthelyezésével az ábra átdarabolható egy $n$, illetve $n-1$ egység oldalú négyzetbe.

Így kapjuk az alkotóelemek számára az $(n-1)^2+n^2$ képletet.

Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a megadottak közül az $a$), $c$), $d$) jelzésűek a helyes ötletek.