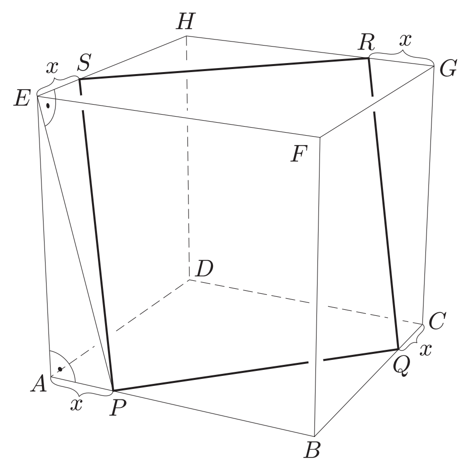
**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy belefér a négyzet a kockába. Jelöljük az egységkocka csúcsait az *ábrán* látható módon. Rögzítsünk egy $0 < x < 1$ távolságot, és vegyük fel az $AB$, $BC$, $GH$ és $HE$ éleken azokat a $P$, $Q$, $R$ és $S$ pontokat, amelyekre $AP = CQ = GR = ES = x$. Ekkor a kocka szimmetriája miatt $PQ = RS$ és mindkét szakaszt merőlegesen felezi a $BDHF$ sík, tehát a $PQRS$ négyszög téglalap.




Pithagorasz tétele segítségével az $x$ függvényében könnyen megadhatjuk a téglalap oldalainak hosszát. A $PBQ$ és az $EAP$ háromszögek nyilván derék szögűek, ezért $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 2(1-x)^2$ és $PE^2 = AE^2 + AP^2 = 1 + x^2$. A kocka $HE$ éle merőleges az $ABFE$ lapra, ezért $PES\sphericalangle = 90°$, tehát

$$PS^2 = PE^2 + ES^2 = 1 + 2x^2.$$

Ha tehát $x$-et növeljük, akkor $PQ$ csökken, $PS$ pedig nő. Egy téglalapba írható legnagyobb négyzet oldalának hossza megegyezik a téglalap nem hosszabb oldalának hosszával. Ezért a $PQRS$ téglalapba írható négyzet akkor lesz a legnagyobb, ha $PQ = PS$ teljesül. Ekkor

$$2(1-x)^2 = 1 + 2x^2, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{1}{4}.$$

Ebben az esetben

$$PQ = PS = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06 > 1{,}05.$$

Tehát ha a $P$, $Q$, $R$ és $S$ pontokat a megfelelő élek negyedelőpontjainak választjuk, akkor a kocka és a $PQRS$ sík metszetében elfér egy $1{,}05 \times 1{,}05$-ös négyzet.

*Megjegyzés.* Megmutatható, hogy a megoldásban konstruált $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ oldalú négyzetnél nagyobb négyzet már nem fér el az egységkockában. Ennek belátása azonban jóval nehezebb feladat, mint magának a négyzetnek a megtalálása.