Megoldás. A $\sqrt{x}$ nevezőben szerepel, így $x > 0$, továbbá $x^2 - x + 1$ minden valós x-re pozitív értéket vesz fel, mivel

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

A bal oldali kifejezés becsléséhez felhasználjuk, hogy $a > 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Írjuk át az egyenlet bal oldalát és becsüljük meg az előbbi egyenlőtlenség segítségével:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq 6.$$

Tehát látjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &\geq 6, \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &\geq 2. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $x + 1$ is pozitív, emiatt az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük és beszorozhatunk a nevezővel:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &\geq 4x^2 - 4x + 4, \\ 0 &\geq 3x^2 - 6x + 3, \\ 0 &\geq (x-1)^2. \end{aligned}$$

Az egyenletnek tehát csak $x = 1$ lehet az egyedüli megoldása. Behelyettesítés után látjuk, hogy ez valóban megoldás is.