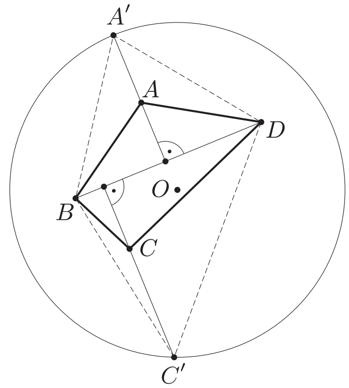
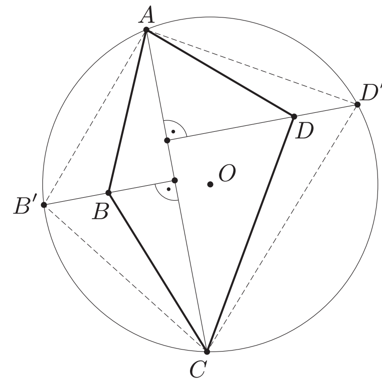
Megoldás. Amennyiben a konvex négyszög valamelyik csúcsa a körlemez belsejében helyezkedik el, a négyszög oldalait lehet úgy növelni, hogy a csúcsokat a körívre visszük ki oly módon, hogy az adott belső csúcson át nem menő átlóra merőleges, az adott pontra illeszkedő félegyenes és a körvonal metszéspontja lesz az új csúcs.





Pitagorasz-tétellel azonnal látható, hogy ezekben az esetekben a két csatlakozó oldal hossza nem csökken. Elegendő tehát húrnégyszögekre bizonyítani az állítást. Írjuk fel a négyszög területét az átlókkal és az oldalakkal is.

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD},$$
$$\frac{ef\sin\varphi}{2} = \frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{cd\sin\delta}{2},$$

ahol φ az átlók szöge, $\beta = ABC\sphericalangle$, $\delta = CDA\sphericalangle$; a, b, c, d a húrnégyszög oldalainak, e és f pedig az átlóinak a hossza. A húrnégyszög szemközti szögei kiegészítő szögek, szinuszaik megegyeznek, továbbá felhasználjuk a kerületi szögek szinusza és a hozzájuk tartozó húrok hossza közötti összefüggést:

$$\frac{ef\sin\varphi}{2} = \frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{cd\sin\delta}{2} = (ab+cd)\frac{\sin\beta}{2} = (ab+cd)\frac{e}{4R}.$$

A másik átlóval is két háromszögre bontva a négyszöget:

$$T_{ABCD} = (bc+da)\frac{f}{4R}.$$

A két képlet összeszorzásával:

$$T_{ABCD}^2 = \left(\frac{ef\sin\varphi}{2}\right)^2 = (ab+cd)(bc+ad)\frac{ef}{16R^2}.$$

Egyszerűsítve ef-fel, felhasználva, hogy $R = 1$, továbbá alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{ef\sin^2\varphi}{4} \geq 2\sqrt{abcd}\cdot 2\sqrt{abcd}\frac{1}{16} = \frac{abcd}{4}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\frac{ef\sin^2\varphi}{4} \geq \frac{abcd}{4}.$$

A húrnégyszög átlói legfeljebb akkorák, mint a kör átmérői, továbbá $\sin\varphi \leq 1$, tehát $abcd \leq 4$. Egyenlőség csak abban az esetben lehetséges, ha mindkét átló átmérő és 90°-os szöget zárnak be egymással, azaz a négyszög négyzet.

Megjegyzés. Az állítás csak konvex négyszögre igaz, mert legyenek például a mellékelt konkáv négyszög oldalai $a = b = \sqrt{3}$, $c = d = \sqrt{2}$. Ekkor

$$a\cdot b\cdot c\cdot d = \left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6.$$