I. megoldás. Ha $a^3+b^3=1$ és a, b pozitív számok, akkor $a, b<1$; ellenkező esetben már az egyik köbe is legalább 1 lenne. Rendezzük át az egyenlőtlenség bal oldalát és használjuk fel a feltételt is:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+(a-1)(b-1)-1&>0,\\ a^2+b^2+(a-1)(b-1)-a^3-b^3&>0,\\ a^2(1-a)+b^2(1-b)+(a-1)(b-1)&>0. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy $0<a, b<1$ miatt $a^2(1-a)$ és $b^2(1-b)$ pozitívak, míg $(a-1)$ és $(b-1)$ negatívak, tehát szorzatuk szintén pozitív. A bal oldal három pozitív tag összege, az állítás igaz.

II. megoldás. Az a és b pozitív számok harmadik hatványainak összege 1, ezért mindkét szám 1-nél kisebb. Tudjuk tehát, hogy $a>a^2>a^3$ és $b>b^2>b^3$. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget 2-vel és a bal oldalról mutassuk meg, hogy pozitív. Közben még egyszer felhasználjuk a feltételt is.

$$\begin{gathered} 2a^2+2ab+2b^2-2a-2b>a^2+a^3+2ab+b^2+b^3-2a-2b= \\ =a^2+b^2+2ab-2a-2b+1=(a+b-1)^2. \end{gathered}$$

Tudjuk, hogy $a+b>a^3+b^3=1$, tehát $(a+b-1)^2>0$.