Megoldás. A nevezőben nem állhat nulla, így $x \neq -1$. A nevezőkkel történő szorzás és a kéttagú polinom negyedik hatványának kifejtése után

$$4 + 4x^4 = 3\left(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4\right),$$

további beszorzást és nullára rendezést követően pedig

$$x^4 - 12x^3 - 18x^2 - 12x + 1 = 0$$

adódik. Ez a szimmetrikus negyedfokú egyenlet gyakran előforduló ú.n. „reciprok egyenlet”, amely minden esetben másodfokú egyenletre vezethető vissza. Az egyenletnek láthatóan nem gyöke az $x = 0$, így oszthatunk x^2-tel:

$$x^2 - 12x - 18 - 12\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Most vezessünk be új ismeretlent az $x + \dfrac{1}{x}$ kifejezés helyett. Az $x + \dfrac{1}{x} = a$ helyettesítéssel, illetve négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2.$$

Alakítsuk át az egyenletet az új ismeretlen segítségével:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0,$$
$$a^2 - 12a - 20 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $a_{1,2} = 6 \pm 2\sqrt{14}$. Az $a = 6 - 2\sqrt{14}$ abszolút értéke kisebb, mint 2, így nem lehet egy valós szám és reciprokának összege. Valós megoldásokat csak az $a = 6 + 2\sqrt{14}$ esetben kaphatunk.

$$x + \frac{1}{x} = 6 + 2\sqrt{14} \Rightarrow x^2 - \left(6 + 2\sqrt{14}\right)x + 1 = 0.$$
$$x_{1,2} = 3 + \sqrt{14} \pm \sqrt{22 + 6\sqrt{14}}.$$

A megoldások valóban ki is elégítik az egyenletet.

Megjegyzés. A feladat szövegében nem szerepelt az alaphalmaz, ennek megfelelően azok is teljes pontszámot kaptak, akik a komplex gyököket is meghatározták. Ezek az $a = 6 - 2\sqrt{14}$ értékből

$$x_{3,4} = 3 - \sqrt{14} \pm i\sqrt{6\sqrt{14} - 22}.$$