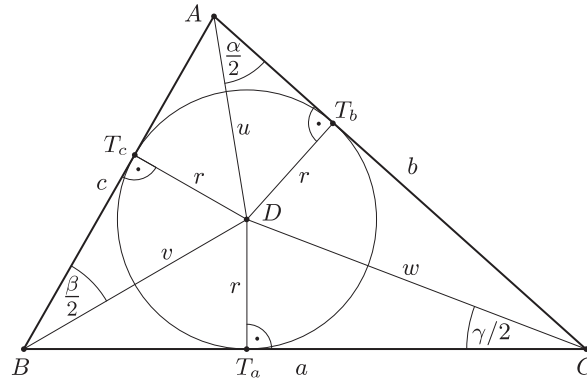


**Megoldás.** Legyen a beírt kör középpontja  $D$ , a beírt kör érintési pontjai  $T_a, T_b, T_c$ , sugara  $r$ . Tudjuk, hogy  $DT_bA$ ,  $DT_aC$  és  $DT_cB$  derékszögű háromszögek, és  $D$  a szögfelezők metszéspontja. Tehát  $\frac{r}{u} = \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{r}{v} = \sin \frac{\beta}{2}$  és  $\frac{r}{w} = \sin \frac{\gamma}{2}$ .



Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy  $a \geq b \geq c$ . Mivel a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van,  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Ebből  $\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2} \geq \frac{\gamma}{2}$ . Tudjuk továbbá, hogy  $0 \leq \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ . A szinuszfüggvény szigorúan monoton nő a  $[0; \frac{\pi}{2}]$  intervallumon, így

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin \frac{\beta}{2} \geq \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Tehát  $\frac{r}{u} \geq \frac{r}{v} \geq \frac{r}{w}$ , vagyis  $\frac{1}{u} \geq \frac{1}{v} \geq \frac{1}{w}$ . A rendezési tétel alapján:

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \geq \frac{a}{v} + \frac{b}{w} + \frac{c}{u} \quad \text{és} \quad \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \geq \frac{a}{w} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v},$$

amiből

$$3 \cdot \left( \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \right) \geq \left( \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \right) + \left( \frac{a}{v} + \frac{b}{w} + \frac{c}{u} \right) + \left( \frac{a}{w} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} \right),$$

$$3 \cdot \left( \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \right) \geq (a + b + c) \cdot \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right).$$

Ezzel beláttuk az állítást.