

Megoldás. A 2-hatványok 7-tel való osztási maradékai 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1 és így tovább, periodikusan ismétlődnek. A feladatban három egymást követő 2-hatvány szerepel, és mindegyikből levontunk 1-et, így a 7-tel való osztási maradékaik biztosan 0, 1, 3, valamilyen sorrendben. Tehát van köztük egy 7-tel osztható szám, de az nem lehet a $2^{n+1} - 1$, tehát a másik kettő közül valamelyik. Ezekről tudjuk, hogy prímszámok. Ha egy prímszám héttel osztható, akkor az csak a 7 lehet.

Így két eset lehetséges: $2^n - 1 = 7$ vagy $2^{n+2} - 1 = 7$.

Az első esetben $n = 3$, amire 7 prímszám, $2^5 - 1 = 31$ prímszám és $2^4 - 1 = 15$ nem osztható 7-tel, így $n = 3$ jó megoldás.

A második esetben $n = 1$. Ekkor $2^1 - 1 = 1$, ami nem prímszám, tehát ez nem megoldás. Így az egyetlen megoldás $n = 3$.